LP8 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Damien RIOU

21 mai 2015

Niveau

PC / PC*

Prérequis

- Statique et cinématique des fluides
- Equation de Navier-Stokes
- Notion de viscosité d'un fluide
- Nombre de Reynolds

Objectifs

- Définir l'écoulement parfait d'un fluide
- Etablir l'équation d'Euler et de Bernoulli
- Appliquer ces équations à deux dispositifs industriels

Plan

Introduction

Dans une leçon précédente, nous avons étudié la dynamique des fluides visqueux, nous avons pu constater que le formalisme était lourd, bien que capable de décrire complètement les phénomènes dans le fluide. Dans cette leçon nous allons, au prix de quelques approximations, alléger l'équation de Navier-Stokes. Ceci est nécessaire, car résoudre les grands systèmes complexes avec l'équation originale est pratiquement impossible du fait de sa non linéarité. Ceci nous permettra aussi de traiter le cas des écoulements parfaits compressibles.

Dans cette leçon, nous allons dans un permet temps définir ce qu'est un écoulement parfait et établir l'équation d'Euler, base de ce type d'écoulement. Ensuite, nous allons établir l'équation de Bernoulli, puis voir quelques applications de type d'écoulement pour justifier de l'intérêt de cette théorie simplificatrice.

A Ecoulement parfait d'un fluide

A.1 Fluide parfait et écoulement parfait

Un fluide est dit parfait si sa viscosité dynamique est rigoureusement nulle. Il n'existe que peu de fluides parfait, l'exemple le plus connu étant l'hélium 4 liquide sous une température de 2,18 K. En dehors de ces cas précis, les fluides ne sont pas parfait ; c'est pourquoi nous allons parler d'écoulement parfait.

Un écoulement est parfait si tous les phénomènes diffusifs sont négligeables devant les effets convectifs. Ces phénomènes diffusifs sont par exemple la diffusion thermique et la diffusion de quantité de mouvement due à la viscosité. Le nombre de Reynolds permet de bien comprendre cela :

$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{[terme\ de\ convection]}{[terme\ de\ diffusion]}$

Rigoureusement, un écoulement est parfait si son nombre de Reynolds tend vers l'infini. Un fluide parfait engendre un écoulement parfait, mais la réciproque n'est pas vérifiée. Les écoulements parfaits se retrouvent assez fréquemment lorsqu'on se place dans l'air, pour de grandes vitesses, comme c'est le cas pour les avions par exemple.

A.2 Equation d'Euler

L'équation de Navier-Stokes est l'équation qui est capable de décrire la dynamique des écoulements incompressibles, irrotationnels et visqueux :

$\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla}P + \eta\triangle\overrightarrow{v}$

Le terme de gauche est une dérivée particulaire. Le premier terme du membre de droite représente le poids volumique, les deux autres termes traduisant l'action du reste du fluide sur la particule de fluide qui a été prise comme système.

L'équation d'Euler est obtenue en négligeant les effets diffusifs qui sont représentés par le terme $\eta\triangle\overrightarrow{v}$. En supprimant ce terme, l'écoulement peut redevenir compressible :

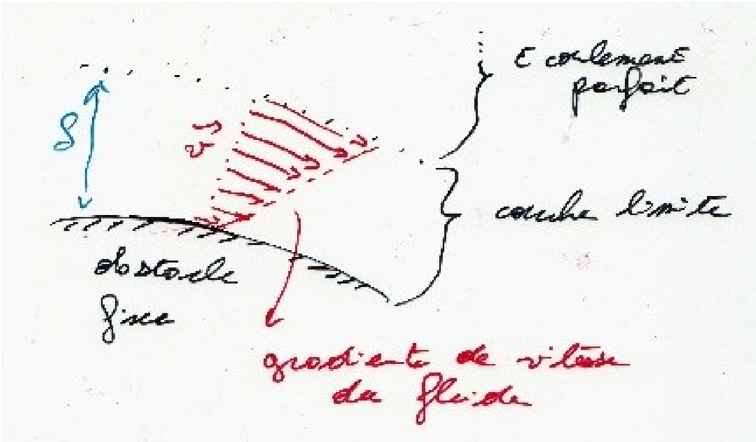
$\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \rho\overrightarrow{g}$- $\overrightarrow{\nabla}$P

L'équation est valable pour les écoulements parfaits compressibles et incompressibles. Elle reste cependant moins générale que Navier-Stokes qui est capable de décrire tous les écoulements incompressibles.

Remarques :

- Si le fluide est au repos, nous retrouvons l'équation de la statique des fluides $\rho\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\nabla}P$.
- Si le fluide est soumis à d'autres forces que le force de pression (ex : forces magnétiques), il faudra prendre soin de les ajouter.
- Cette équation reste malgré tout résolvable, nous dénombrons 6 inconnues $(v_x, v_y v_z, P, \sigma, \rho)$. L'équation d'Euler nous donne trois équations, la conservation de la masse en donne une nouvelle ($\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\overrightarrow{v}) = 0$. Une équation supplémentaire est une équation d'état, et un bilan énergétique vient compléter le tout.

Nous avons vu, lors de la leçon sur les écoulements visqueux que le fluide accroche aux parois. Il en est de même pour un écoulement parfait. C'est ainsi que nous constatons l'apparition d'un grand gradient de vitesse entre la paroi et la majeure partie de l'écoulement : cette zone sera appelée couche limite. C'est dans cette zone que nous avons concentration de la majeure partie des effets dus à la viscosité. Nous pouvons dire que la couche limite n'est pas importante en terme de dimension. Malgré tout, elle est primordiale pour la prise en compte des effets visqueux dans l'écoulement.



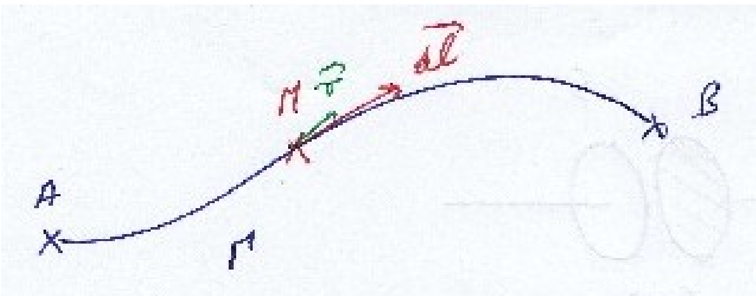
Ainsi, l'écoulement est parfait vu qu'on néglige les dimensions de la couche limite devant celles de l'écoulement et de l'obstacle.

B Equation de Bernoulli

Dans ce paragraphe, nous allons nous placer dans un référentiel galiléen, dans le cadre d'un écoulement parfait, incompressible et homogène dans un champ de pesanteur homogène.

B.1 Relation de Bernoulli pour un écoulement tourbillonnaire

Nous prenons l'équation d'Euler sous la forme :
$\rho\left[\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{v}\right]=\rho\overrightarrow{g}-\overrightarrow{\nabla}P$
Nous allons intégrer cette équation sur la ligne de courant (M) de l'écoulement allant de A à B suivant le point M :



Vu que l'écoulement est stationnaire, homogène et ayant un champ de pesanteur homogène, nous avons :
$\int_{(\Gamma)}\overrightarrow{\nabla}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho gz\right)\cdot d\overrightarrow{l}+\int_{(\Gamma)}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{v}\right)\cdot d\overrightarrow{l}=0$
En intégrant et en observant que $\overrightarrow{v}$ et $d\overrightarrow{l}$ sont colinéaires, on obtient l'équation de Bernoulli sur une ligne de courant :
$\rho\frac{v_A^2}{2}+P_A+\rho gz_A=\rho\frac{v_B^2}{2}+P_B+\rho gz_B=\mathcal{C}'$
Ici, la constante $\mathcal{C}'$ n'est valable que sur la ligne de courant sur laquelle a été faite l'intégration.

B.2 Relation de Bernoulli pour un écoulement irrotationnel

Rappelons l'équation d'Euler :
$\rho\left[\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{v}\right]=\rho\overrightarrow{g}-\overrightarrow{\nabla}P$
Vu que l'écoulement est irrotationnel, stationnaire, homogène et ayant un champ de pesanteur homogène, nous avons :
$\overrightarrow{\nabla}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho gz\right)=\overrightarrow{0}$
L'intégration de cette formule nous donne :
$\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho gz=\mathcal{C}$
Dans ce cas, la constante $\mathcal{C}$ est valable dans tout l'écoulement, c'est un écoulement potentiel.

B.3 Analyse énergétique

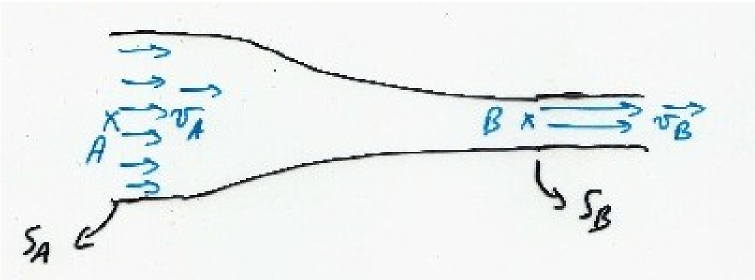
Cette équation peut être vue comme la somme d'une énergie cinétique volumique et d'énergies potentielles volumiques de pression et de pesanteur. Par ailleurs, pour un fluide parfait incompressible, nous avons nullité de la puissance des forces internes à l'écoulement.

C Application de la dynamique des écoulements parfaits

Le formalisme que nous avons introduit pour décrire les écoulements parfaits peut être utilisé pour résoudre des problématiques industrielles.

C.1 Effet Venturi

Soit une canalisation horizontale se resserrant.



La relation de Bernoulli associée à une ligne de courant donne :

$\rho\frac{v_A^2}{2} + P_A = \rho\frac{v_B^2}{2} + P_B$

La conservation du débit pour un fluide incompressible nous impose :

$S_A v_A = S_B v_B$

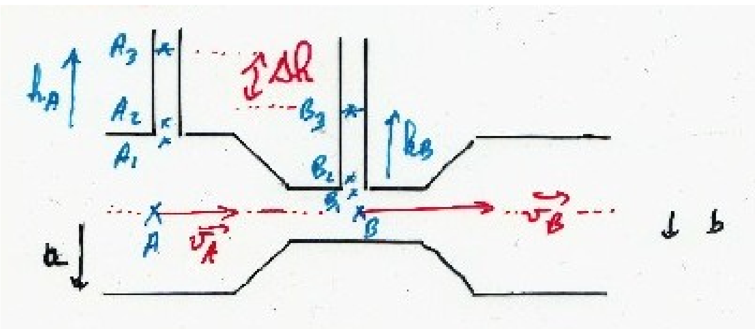
Nous obtenons donc :

$P_B = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2}\left[1 - \left({}^{S_A}/_{S_B}\right)^2\right]$

Ainsi, l'effet Venturi impose que la pression est plus faible dans les zones de plus faible section qui correspondent aux zones de plus grande vitesse de fluide.

C.2 Mesure d'un débit dans une canalisation

L'effet Venturi nous permet ainsi de fabriquer des débitmètres. Considérons ici une canalisation horizontale et cylindrique dans laquelle est présent un écoulement parfait. Cette canalisation possède un étranglement. Deux colonnes sont en contact avec le fluide et l'altitude maximale atteinte dans celles-ci par le fluide sont distantes d'une hauteur $\triangle h$.



Sur une ligne de courant, nous avons :

$\rho\frac{v_A^2}{2} + P_A = \rho\frac{v_B^2}{2} + P_B$

La conservation du débit nous impose :

$\pi a v_A = \pi b v_B$

Nous avons alors :

$P_A - P_B = \rho\frac{v_A^2}{2}\left[\left({}^{a}/_{b}\right)^2 - 1\right]$

Nous pouvons alors avoir la vitesse au point A :

$v_A = \sqrt{\frac{2g\triangle h}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}}$
De cette vitesse nous pouvons alors déduire le débit dans la canalisation :
$D_v = \pi a \sqrt{\frac{2g\triangle h}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}}$

C.3 Mesure de la vitesse air d'un avion

Un avions possède de multiples moyens pour mesurer sa vitesse, mais la mesure la plus importante reste celle réalisée avec les tubes de Pitot qui lui indiquent sa vitesse par rapport à l'air qui l'entoure.
Sur la ligne d'écoulement A, nous appliquons la relation de Bernoulli, et nous obtenons :
$P_A = \rho \frac{v_\infty^2}{2} + P_\infty$
L'application de cette même relation sur la ligne de courant du point B donne :
$P_B = P_\infty$
Nous avons alors :
$v_\infty = \sqrt{2\frac{P_{A1} - P_{B1}}{\rho_{air}}}$
Nous considérons qu'il n'y a pas de mouvement de fluide dans les canalisation, on a alors :
$P_{A1} - P_{B1} = \rho_{liq} g \triangle h$
Ainsi :
$v_\infty = \sqrt{2\frac{\rho_{liq}}{\rho_{air}} g \triangle h}$
A partir d'une simple mesure de distance, nous sommes capable de déterminer la valeur de la vitesse de l'écoulement.

Conclusion

Durant cette leçon, nous avons étudié la dynamique des fluides parfaits. Cette théorie est utile pour décrire assez simplement les écoulements à haut nombre de Reynolds et ainsi s'affranchir du caractère visqueux du fluide qui le compose.

Bibliographie

[1] Mécanique des fluides et des ondes mécaniques, Faroux, Dunod

[2] Physique 2e année PC PC*, Olivier, Tec&Doc, Lavoisier

[3] Tout-en-un physique : PC, Brenders, Bréal