Leçon de Physique 9 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Nicolas-Alexandre Goy

Le 29 Mai 2017

Niveau : Licence 2 de Physique

Pré-requis : Cinématique des fluides (débits, écoulements incompressibles, irrotationnels) ; contraintes sur un fluide (forces de pression, viscosité : équation de Navier-Stokes) ; diffusion (quantité de mouvement par viscosité et chaleur) ; bilans en thermodynamique des systèmes ouverts (bilan de masse, quantité de mouvement) et premier principe.

Objectifs : Définir ce qu'est un écoulement parfait ainsi que l'équation et les conditions sur le système qui permettent de considérer un écoulement comme parfait. Démontrer et interpréter la relation de Bernoulli. Illustrer quelques exemples d'applications ou conséquences.

Bibliographie :
[1] : *Mécanique, Fondements et applications*, J.Ph. Pérez, Édition Dunod (et thermo)
[2] : *Physique tout-en-un PC/PC**, M-N. Sanz et B. Salamito, Édition Dunod (il y a déjà tout)
[3] : *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit, CNRS Editions (complément)

INTRODUCTION : Nous avons établi, dans les leçons précédentes, l'ensemble des actions surfaciques et volumiques qui s'exercent sur un fluide. Nous avons vu les éléments cinématiques pour introduire l'équation de Navier-Stokes régissant la dynamique du fluide. Nous allons "résoudre" (ou plutôt exploiter) cette équation à priori insolvable sous certaines conditions afin de pouvoir se rapprocher du comportement des fluides de notre quotidien ou à notre échelle : écoulement d'eau dans une canalisation d'eau, écoulements atmosphériques, etc...

I. Fluide parfait et écoulement parfait

A. Position du problème

Un fluide parfait est rigoureusement sans viscosité : seul l'Hélium supercritique est sans viscosité (effets quantiques). Un écoulement parfait est un écoulement où il n'y a pas de phénomènes de diffusion (pas de sources d'irréversibilité). L'évolution du fluide est une transformation aidabatique réversible (+ température homogène dans le fluide) = équilibre thermodynamique ; et on néglige les effets visqueux. On reste sur le cas d'un système monophasé (pas de tension de surface). L'échelle de description sera comme d'habitude l'échelle de la particule de fluide (mésoscopique : dans le micromètre), et le fluide sera traité comme un milieu continu avec une approche eulérienne, où la vitesse des particules de fluide sera inférieure à la vitesse du son.

B. L'équation d'Euler

On se place dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen. La dynamique eulérienne (on regarde les champs en un point fixé) est régie par l'équation de Navier-Stokes (PFD avec forces volumiques locales) :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}P+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+\vec{f}_{autres} \quad (1)$$

Où les termes sont respectivement : terme instationnaire, terme de transport convectif, terme de pesanteur, terme de pression, terme de friction visqueuse (diffusif), terme de friction due à la dilatation d'une particule de fluide, et enfin d'autres forces volumiques. Problème : cette équation est extrêmement dure à résoudre (car non linéaire, et il n'y a pas de solution générale = inaccessibilité mathématique). Nous avons besoin de faire des approximations : nous allons évaluer les ordres de grandeur des termes les plus pénibles.

On suppose un écoulement très faiblement compressible : le terme de compressibilité est négligeable. Nous montrerons que cela est bien le cas pour des écoulements de vitesse inférieure à celle du son dans la leçon sur les ondes acoustiques (d'ailleurs, c'est ce qui donne une masse volumique constante). On définit le nombre de Reynolds comme l'ordre de grandeur du transport de quantité de mouvement convectif sur le phénomène diffusif :

$$Re \sim \frac{OG(\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})}{OG(\eta\Delta\vec{v})} = \frac{\rho U L}{\eta} \tag{2}$$

Avec ρ la masse volumique du fluide au repos, U et L respectivement : la vitesse caractéristique de l'écoulement et la longueur sur laquelle la vitesse varie ; et η la viscosité. Dans le cas où $Re << 1$ on a l'équation de Stokes déjà traitée, et dans le cas de $Re >> 1$ nous pouvons négliger tous les effets visqueux. Tant que $Re < 2000$ (écoulement de Poiseuille), nous avons un écoulement laminaire, et si $Re > 3000$, nous avons un écoulement turbulent où là il faudra moyenner les grandeurs par rapport à leur fortes fluctuations statistiques). Nous arrivons alors à l'équation d'Euler qu'il faut résoudre :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P \tag{3}$$

Cette équation reste encore difficile à résoudre... mais c'est possible si, à cause du nombre d'inconnues, nous rajoutons l'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ (l'ensemble sera valable si l'écoulement est incompressible ou non), et surtout une équation d'état du fluide (on impose la température : on prendra un écoulement barotrope où nous avons une relation pression $<=>$ masse volumique). Remarque : quand $\vec{v} = \vec{0}$ on retrouve l'hydrostatique.

C. Conditions aux limites et notion de couche limite

Avant de se lancer dans la résolution de cette équation, il convient de discuter des conditions aux limites et des limites du modèle.

Discutons des conditions aux limites. Lorsque le fluide est en contact avec un solide (immobile par exemple) on a une condition d'impénétrabilité du fluide :

$$\vec{v}_{/paroi}\cdot\vec{n} = 0 \tag{4}$$

Dans ce modèle, le fluide glisse sur la paroi contrairement à l'écoulement visqueux qui y adhère. En ce qui concerne les contraintes dynamiques entre deux fluides nous pouvons faire le raisonnement où l'on applique le PFD à une particule de fluide (PF) cylindrique à l'interface entre deux fluides. On a alors : $\rho\pi r^2 h\vec{a} = \pi r^2 h\vec{f_v} + \pi r^2\vec{f_s}$. Dans la limite à l'interface : où h=0, on obtient la continuité des contraintes aux surfaces (séparément tangentielles et normales). Ainsi, dans ce modèle, nous avons :

$$\begin{cases} \eta_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} = \eta_2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ P_1(M) = P_2(M) \end{cases} \tag{5}$$

En réalité, proche des parois, la viscosité de cisaillement a une influence notable, ce qui assure quand même l'adhérence et les frottements : c'est ici que la vorticité peut se générer. Considérons un objet de taille L se déplaçant à une vitesse U. A l'instant t l'extrémité du système est en O. A l'instant $t + dt$ tout le corps s'est déplacé tel qu'en O on ait l'autre extrémité de l'objet. A cause de la traînée, il s'est créé en O toute une couche (appelée couche limite) où nous avons le transport de quantité de mouvement. Cette couche a une taille donnée par l'ordre de grandeur de la diffusion. Ainsi, nous avons :

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} \tag{6}$$

Pour pouvoir considérer un écoulement comme parfait il faudra se placer à une distance $d > \delta$ de l'interface, tant que $\delta < L$. L'existence de cette couche limite nous permet d'interpréter la force de traînée ou l'effet Magnus : force apparaissant quand un objet est en translation et en rotation dans un fluide. En ordre de grandeur, nous pouvons dire qu'un nageur (taille de 1m) nageant à 1m/s dans l'eau, ou une voiture allant à 90km/h dans l'air correspondent à des écoulements parfaits (grand Reynolds et couche limite millimétrique) ; en revanche une bactérie de 100 μm allant à une vitesse de 30 $\mu m/s$ dans l'eau (petit Re) correspondra à un écoulement visqueux (correspondance $<=>$ traitement).

II. Le théorème de Bernoulli

A. Démonstration à partir de l'équation d'Euler

L'écoulement parfait est régit par l'équation d'Euler qui fut écrite avant celle de Navier-Stokes à l'époque où les effets visqueux étaient encore méconnus. Elle est difficile à résoudre, nous allons donc en calculer son intégrale première. Supposons un écoulement parfait et surtout incompressible $<=> \rho =$ constante. Nous visualisons une ligne de courant allant du point A au point C. Nous allons calculer la circulation de l'équation d' Euler (travail des forces) sur un contour : Γ_{AC}. En remarquant l'identité vectorielle suivante : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)$, en utilisant le fait que $\rho\vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$ comme en mécanique du point (d'où un écoulement incompressible), et enfin avec $\vec{\nabla}A \cdot \vec{dl} = dA$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\int_{\Gamma_{AC}} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + I_{\Gamma_{AC}} = B(A) - B(C) \tag{7}$$

Où $B(X) = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P$ est le nombre de Bernoulli au point X (souvent appelé la charge). Celui peut varier dans le temps à cause du terme instationnaire. Il nous reste un terme en plus à traiter : $I_{\Gamma_{AC}} = \int_{\Gamma_{AC}} \left((\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{dl}$. Ce terme est nul si l'écoulement est irrotationnel : il n'y a aucune contrainte sur les points A et C. De plus, pour un écoulement parfait, il n'y a pas de phénomène de diffusion, ainsi : la vorticité se conserve (théorème de Kelvin). En revanche, dans le cas d'un écoulement à vorticité non nulle, nous pouvons annuler cette intégrale uniquement si nous imposons A et C sur une ligne de courant (le produit mixte s'annule à cause de la colinéarité entre la vitesse et le déplacement).

Dans le cas d'un régime stationnaire (en plus d'incompressible et irrotationnel), le nombre de Bernoulli se conserve. Remarque : On pourrait généraliser à un écoulement compressible en divisant les expressions précédentes par la masse volumique et en définissant une fonction ψ telle que $\vec{\nabla}\psi = \frac{\vec{\nabla}P}{\rho}$ et donc remplacer ce terme dans les expressions, puis à le simplifier en $\frac{P}{\rho}$ dans le cas incompressible.

B. Interprétation en terme de bilan énergétique

On peut remarquer que le nombre de Bernoulli définit plus haut. Pour comprendre la véritable origine de la relation de Bernoulli, nous devons faire un bilan d'énergie traversant un système ouvert. Considérons une portion d'écoulement délimitée par une surface de contrôle Σ fixe (système ouvert). Il y entre une masse δm_e à l'instant t et donc il en sort une masse δm_s à l'instant $t + dt$. Nous pouvons nous ramener à un système fermé Σ^*= [Σ + entrant ou sortant selon l'instant]. La démonstration suivante sera alors considérée (pour alléger le calcul) comme en régime stationnaire.

L'énergie du système fermé à l'instant t est donnée par :

$$E^*(t) = E(t) + \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2 + \delta m_e u_e + \delta m_e g z_e \tag{8}$$

Où u_e est l'énergie interne massique de la masse de fluide entrante. A l'instante $t+dt$ on remplace les e par des s. Ainsi, on obtient une certaine expression de $dE^* = E^*(t + dt) + E^*(t)$ (on retrouve que la variation temporelle correspond à ce qu'il entre moins ce qu'il sort). On se place en régime stationnaire : toutes les grandeurs eulériennes sont constantes dans le temps (et conservation de la masse globale du système) : $dE = 0$ et $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$. Comme le système Σ^* est fermé, nous pouvons appliquer le premier principe de la thermodynamique. On obtient alors :

$$\begin{cases} dE^* = \delta m[\frac{1}{2}v^2 + u + gz]_e^s \\ dE^* = \delta Q + \delta W_u + \delta W_p \end{cases} \tag{9}$$

Où les termes de la seconde équation sont respectivement : les échanges de chaleur, le travail utile (autres forces que la pression), le travail des forces de pression : $\delta W_p = -PdV = -P\frac{\delta m}{\rho}$. En regroupant tout ces termes et en divisant par dt (avec $D_m = \frac{\delta m}{dt}$ le débit massique) nous obtenons le résultat suivant :

$$D_m[\frac{1}{2}v^2 + u + gz + \frac{P}{\rho}]_e^s = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_u}{dt} \tag{10}$$

On retrouve ainsi la relation de Bernoulli lorsqu'il n'y a pas de diffusion (les puissances du terme de droite sont nulles) et lorsque l'écoulement est incompressible (terme d'énergie interne devient nul : pas de travail des forces internes). La relation de Bernoulli découle de la conservation de l'énergie sous toutes ses formes.

III. Applications

A. Mesure de la vitesse d'un écoulement : tube de Pitot

Considérons un tube de Pitot dans une aile d'avion. Un tube est orienté face à l'écoulement de l'air (ρ_a) de vitesse v_0 vu par l'avion. Ce tube est tellement petit (surface d'environ $s = 0,5mm^2$) qu'il se trouve que nous pouvons le considérer comme un point d'arrêt. Un autre tuyau est placé perpendiculairement à celui-ci. Ces deux tuyaux sont reliés par un manomètre différentiel (tube en U contenant un liquide (ρ_l) où l'on peut, grâce à la loi d'hydrostatique, déterminer une différence de pression grâce à une différence de hauteur : $\delta P = \rho_l g h$) contenant un fluide immobile. L'application du théorème de Bernoulli sur deux lignes de courant, chacune allant de l'infini vers l'extrémité d'un des deux tuyaux, nous donne la relation suivante : $v_0 = \sqrt{\frac{2\delta P}{\rho_a}}$. Typiquement, pour $\delta P = 200Pa$, nous avons : $v_0 = 20m/s$.

B. Effet Venturi et de courbure

Nous allons décrire les différents effets qu'apportent un resserrement des lignes de courant et la courbure des lignes de courant sur les grandeurs caractéristiques du fluide. Le premier effet étudié est l'effet Venturi. Considérons un écoulement unidirectionnel (horizontal par exemple) confiné dans une canalisation. La section de la canalisation est S et le fluide s'y écoule avec une vitesse V. La canalisation se rétrécit à un endroit et devient d'une section s et le fluide s'y écoule à une vitesse v. Des prises de pression (tuyaux verticaux) sont placées au niveau des deux zones : à cause de la pression, comme nous avons montré dans les cours précédents que le gradient de pression perpendiculaire à un écoulement unidirectionnel est hydrostatique, le fluide monte jusqu'à une altitude z depuis le centre de la canalisation jusqu'à obtenir un équilibre hydrostatique à P_0 la pression ambiante.

Dans le cadre d'un écoulement incompressible, le débit volumique est conservé : on a $D_v = SV = sv$. Ainsi la vitesse du fluide est plus grande dans la canalisation de petite section. En utilisant la relation de Bernoulli, nous montrons qu'effectivement, la pression est plus petite, ce qui s'observe expérimentalement par une hauteur de fluide dans la prise de pression qui est plus petite. Ce phénomène est utilisé par une espèce animale : *l'ampheidae*, autrement appelée "crevette pistolet" qui se défend grâce à ses pinces. Ses pinces sont particulières qui peuvent se refermer à une vitesse de 20 m/s propulsant ainsi le fluide aux alentours. Cette propulsion (comme on est dans l'eau à grande dimensions) a pour conséquence d'abaisser la pression : elle s'abaisse d'une manière très rapide jusqu'à l'apparition de cavitation hydrodynamique, soit une création de bulle d'air de très faible densité, qui à cause du fluide statique environnant implose et fait augmenter la température jusqu'à ébullition.

Un effet supplémentaire que nous pouvons aborder rapidement est l'effet Coanda relatif à la courbure des lignes de courant. On peut montrer, grâce à l'équation d'Euler sans la gravité et en régime stationnaire que le gradient de pression est tourné dans le sens inverse du transport convectif. Considérons une ligne de courant circulaire : $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$. Le calcul du terme convectif nous montre alors que : $\vec{\nabla}P = \frac{v^2}{r}\vec{e_r}$: on a un gradient de pression à cause de la courbure. Ceci est un début d'interprétation des forces de portance qui s'exercent sur une aile d'avion (courbée de telle façon que la pression en dessous est supérieure à la pression au dessus).

OUVERTURE : Citons quelques autres phénomènes intéressants qui pourraient être reliés ou décrits par ce que nous avons établi aujourd'hui. Nous pourrons en guise d'exercice traiter le cas d'un référentiel non Galiléen avec les écoulements atmosphériques. Une autre application du théorème de Bernoulli serait la vidange d'un récipient : démonstration de la formule de Toricelli. On pourrait montrer que lorsque les lignes de courant sont courbées, nous avons une différence de pression (aussi reliées à un gradient de vitesse) : cela nous emmène donc à une première interprétation de la force de portance qui doit être complétée par des phénomènes visqueux (Magnus, etc...), tout en rajoutant la force de traînée qui selon l'orientation de la surface par rapport à l'écoulement résulte d'un transfert de quantité de mouvement par inertie (bilan de quantité de mouvement) ou par viscosité (approche descriptive). Les prochains phénomènes à décrire sont les suivants : forces capillaires (ajout d'une condition aux limites et ondes capillaires), ondes acoustiques, les régimes turbulents non décrits par Bernoulli, les forces de traînée et de portance (en détail), ainsi que les instabilités décrites par les écoulements potentiels.