# Leçon de Physique 21 : Induction électromagnétique

Nicolas-Alexandre Goy

Le 10 Octobre 2016

**Niveau :** Licence 2 de Physique

**Pré-requis :** Electrostatique, Magnétostatique, et notions d'électrocinétique

**Objectifs :** Découvrir et comprendre d'un point de vue historique le phénomène d'induction électromagnétique, c'est à dire :
→ Rappeler les équations de Maxwell en régime statique
→ Découvrir l'effet d'un champ magnétique sur un circuit en mouvement (loi d'Ohm, et travail des forces de Laplace = loi de Maxwell + flux coupé)
→ Illustrer l'induction électromagnétique et connaître la différence entre induction au sens de Neumann et au sens de Lorentz
→ S'approprier la loi de Faraday et la loi de Lenz à travers des exemples concrets
→ Définir l'auto-induction
→ Illustrer (si possible) avec des exemples d'applications

**Bibliographie :**
[1] : *Électromagnétisme, Vide et Milieux matériels*, J.Ph. Pérez, Édition Masson
[2] : *Cours de Physique électromagnétisme 2 : Phénomènes d'induction et ondes électromagnétique*, D.Cordier, Édition Dunod
[3] : *Cours de physique électromagnétisme 3 : Magnétostatique, induction, équations de Maxwell et compléments d'électronique*, M. Bertin, JP. Faroux, Édition Dunod Université
[4] : *Physique Tout-en-un PSI et PSI**, MN. Sanz, B. Salamito, Édition Dunod

**INTRODUCTION :**

Dans cette leçon, nous allons introduire et caractériser le phénomène d'induction électromagnétique en prenant l'approche historique. Cela va nous permettre de montrer l'origine de l'équation de Mawell-Faraday : un premier pas vers le couplage des champs électriques et magnétiques en régime variable. Après un rappel sur la force de Lorentz, ainsi que ses conséquences sur l'établissement d'un courant dans un conducteur fixe ou en mouvement (loi d'Ohm et travail de la force de Laplace : flux coupé), nous nous axerons sur une approche expérimentale puis théorique du phénomène d'induction électromagnétique (expérience de Faraday, lois de Lenz et Faraday), pour enfin examiner quelques cas, le phénomène d'auto-induction, et quelques applications.

On rappelle qu'avant 1831, les régimes statiques étaient bien connus, et que les équations de Maxwell en régime statique (encore non nommées) étaient comprises :
→ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ = création d'un champ électrique à flux non conservatif par des charges électriques.
→ $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ = le champ électrique est à circulation conservative (dérive d'un potentiel).
→ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ = Champ magnétique à flux conservatif (inexistence de monocharges magnétiques.
→ $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ = Création d'un champ magnétique par un courant de charges.

Il s'agit ici de voir quelle équation est modifiée par l'apparition d'un champ magnétique variable dans le temps : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

# I. Force de Lorentz, Force de Laplace

On rappelle que lorsqu'une particule de masse $m$, de charge $q$, se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, cette particule subit une force appelée "force de Lorentz" donnée par :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \tag{1}$$

## A. Loi d'Ohm locale pour un conducteur fixe et en mouvement dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

Prenons l'exemple général présenté sur la figure 1 : un conducteur est placé dans un champ électromagnétique statique. Celui-ci est constitué d'une densité volumique $n$ de charges fixes et d'électrons libres. Sous l'effet d'un champ électrique, les électrons libres vont se mettre en mouvement dans le conducteur. Ils subissent alors l'action de la force de Lorentz, et des collisions élastiques (espacées d'une durée $\tau$) avec l'environnement (charges fixes) équivalentes à une force de frottement (modèle de Drude à voir dans une autre leçon).

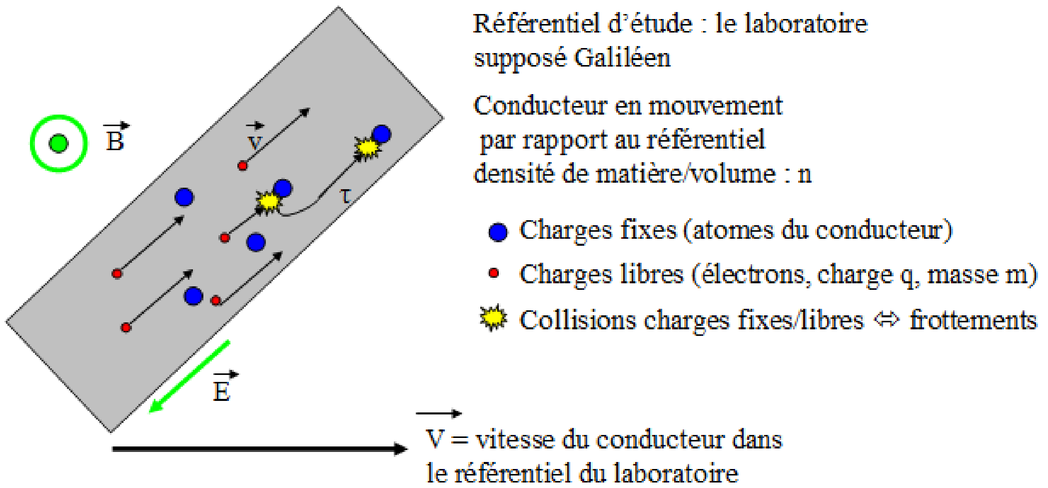


Figure 1: *Schéma du système à étudier.*

Dans le cas où le conducteur est fixe dans le référentiel du laboratoire ($\vec{V} = \vec{0}$), l'équation de la dynamique pour un électron libre s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) - \frac{m}{\tau}\vec{v} \tag{2}$$

Cette équation différentielle est d'ordre 1. L'établissement d'une vitesse constante va être transitoire de suivant une loi exponentielle. Après établissement du courant ($\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$), nous obtenons que la densité de courant dans le conducteur s'écrit :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \tag{3}$$

C'est la loi d'Ohm locale, où ici $\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}$ est la conductivité électrique du matériau.

Remarque : En réalité, on doit rajouter le terme : $\frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B}$ dans cette équation. Ce terme correspond à l'effet Hall (accumulation de charges sur les parois du conducteur) qui est négligeable pour les conducteurs puisqu'il va rapidement être compensé par l'apparition d'une composante supplémentaire du champ électrique. Nous le montrerons dans une autre leçon.

Lorsque le conducteur se déplace ($\vec{V} \neq \vec{0}$), la loi d'ohm locale est modifiée (on reprend le calcul précédent avec $\vec{v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{V}$) :

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \tag{4}$$

On en conclut alors que lorsque que le conducteur se déplace, le courant dans celui-ci est affecté par la présence du champ magnétique, ce qui est un premier pas vers l'idée de l'induction. Nous pouvons remarquer que dans le référentiel du conducteur, les charges ressentent un champ $\vec{E'}$ (le champ magnétique étant identique) tel que :

$$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \tag{5}$$

## B. Travail des forces de Laplace et flux coupé

Considérons le système suivant : un conducteur en mouvement dans un champ magnétique à la vitesse $\vec{V}$. La force magnétique sur un électron en mouvement dans le conducteur à la vitesse $\vec{v}$. La force magnétique dans le conducteur s'écrit $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Soit avec $q = \rho dV$ où $\rho = nq$ est la charge contenue dans un élément de volume $dV = dl.dS$, nous obtenons que : $q\vec{v} = \vec{j}dV = I\vec{dl}$, avec $I = \vec{j} \cdot \vec{dS}$ est l'intensité du courant parcourant le conducteur. La force de Lorentz généralisée sur un fil conducteur parcouru par un courant $I$ est appelée "force de Laplace", et s'écrit :

$$\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B} \tag{6}$$

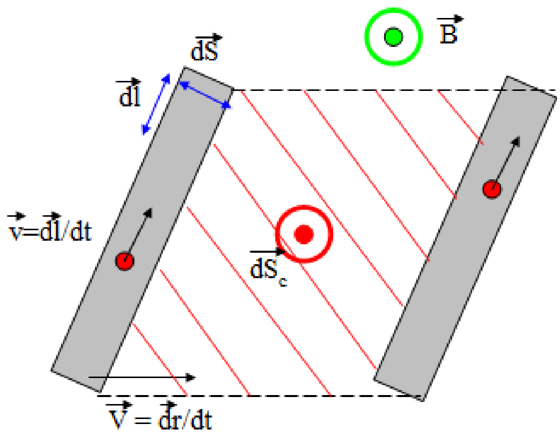


Figure 2: *Schéma du système à étudier.*

Le travail élémentaire de la force de Laplace sur le déplacement des charges s'écrit :

$$\delta W = I(\vec{dl} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{dl} + \vec{dr}) \tag{7}$$

Le premier terme est nul : cela signifie que le champ magnétique ne travaille pas sur les charges en déplacement (c'est un résultat connu). Le second terme, s'écrit, à l'aide d'une permutation circulaire : $\delta W = I\vec{B} \cdot (\vec{dr} \wedge \vec{dl})$ où on identifie $d\vec{S_c} = \vec{dr} \wedge \vec{dl}$ est l'aire balayée par le circuit lors de son déplacement. En notant : $d\phi_c = \vec{B} \cdot d\vec{S_c}$ le flux coupé du champ magnétique à travers la surface considérée, nous obtenons :

$$\delta W = I d\phi_c \tag{8}$$

Remarques : Nous voyons maintenant que le champ magnétique ne travaille pas sur les particules, mais sur le circuit alimenté par un courant qui se déplace. Nous pouvons montrer avec la loi de Maxwell : $\delta W = I\Delta\phi$ en considérant que le champ magnétique est à flux conservatif, et avec $\Delta\phi$ est la différence du flux du champ magnétique à travers le circuit dans ses états final et initial.

# II. Le phénomène d'induction électromagnétique

Nos allons ici introduire le phénomène d'induction électromagnétique. Celui-ci a été découvert par M.Faraday en 1831. A l'époque, les scientifiques connaissaient bien les phénomènes statiques. Nous choisissons ici une première approche expérimentale.

## A. Expérience de Faraday (1831)

Faraday a réalisé le montage présenté sur la figure 3. Un circuit $C_1$ comportant un bobinage est alimenté par un générateur. On note $i_1$ le courant susceptible de passer dans celui-ci. Un interrupteur $K$ permet de contrôler l'établissement du courant. Un circuit $C_2$ de la même forme est placé en face. Il n'y pas d'interrupteur, et le générateur est remplacé par un ampèremètre. On note $i_2$ le courant susceptible de passer dans ce circuit. Deux expériences sont faisables :

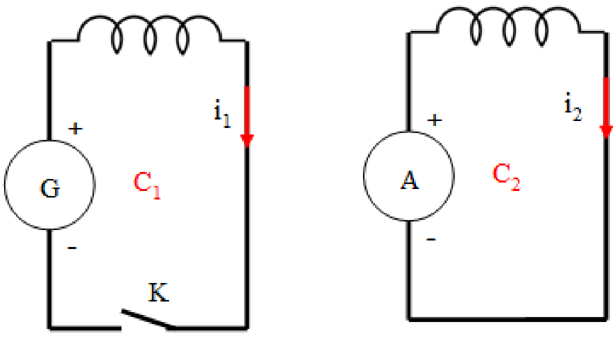


Figure 3: *Expérience de Faraday*

**Expérience 1** : $C_1$ et $C_2$ sont immobiles dans le référentiel d'étude.
⇒ Quand $K$ est ouvert : $i_1 = 0$, nous obtenons $i_2 = 0$.
⇒ Fermeture de $K$ : $i_1$ augmente, nous obtenons $i_2 < 0$.
⇒ Quand $i_1$ devient constant, nous obtenons $i_2 = 0$.
⇒ Ouverture de $K$ : $i_1$ diminue, nous obtenons $i_2 > 0$.
⇒ $i_1$ arrive à 0, nous obtenons $i_2 = 0$.

**Expérience 2** : $C_1$ est immobile dans le référentiel d'étude, et $i_1 \neq 0$ mais est constant.
⇒ Quand $C_2$ est immobile, nous obtenons $i_2 = 0$
⇒ Quand $C_2$ est s'approche de $C_1$, nous obtenons $i_2 < 0$
⇒ Quand $C_2$ est s'éloigne de $C_1$, nous obtenons $i_2 > 0$
⇒ Quand $C_2$ est immobile, mais $C_1$ se déplace, les résultats obtenus sont identiques.

## B. Interprétations, Lois de Faraday et de Lenz

L'apparition d'un courant dans le circuit se traduit par le fait qu'il existe une force qui travaille sur les particules. Notons ce travail : $\delta T$. Nous savons qu'une particules acquiert de l'énergie cinétique si elle est soumise à une différence de potentiel. Nous avons $\delta T = q.e$ où $q$ est la charge de particule, et $e$ est la force électromotrice (ou différence de potentiel). Par conséquent nous pouvons écrire que ce travail correspond à la circulation d'une force $\vec{F}$ susceptible de mettre en mouvement les particules : $\delta T = \vec{F} \cdot \vec{dl}$. Soit en notant que $e = \frac{\delta T}{q}$, nous obtenons :

$$e_2 = \oint_{C_2} \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl_2} = \oint_{C_2} \vec{E_m} \cdot \vec{dl_2} \tag{9}$$

Où $\vec{E_m}$ correspond à un champ électromoteur (champ électrique) ressenti par la particule qui est mise en mouvement (le symbole de contour fermé correspond au fait que nous avons une force sur tout le circuit).

Expérimentalement, Faraday a déterminé sa loi :

$$\begin{cases} e_2 = -\dfrac{d\phi}{dt} \\ \phi = \displaystyle\iint_{S_2} \vec{B_1} \cdot d\vec{S_2} \end{cases} \tag{10}$$

Cette loi de Faraday nous dit que nous pouvons créer une force électromotrice dans un circuit (donc créer un courant en associant $e_2 = Ri_2$) si le flux d'un champ magnétique à travers la surface créée par le circuit varie dans le temps. Nous allons illustrer ce propos dans le paragraphe suivant. Cette loi est une loi fondamentale de l'électromagnétisme.

Une conséquence/interprétation de cette loi est la loi de modération de Lenz. Celle-ci explique le signe négatif qui apparaît dans l'équation : "Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui les produisent". Autrement dit : "Le courant induit est d'un sens qu'il génère un champ magnétique qui va compenser les variations du premier".

## C. Les deux cas types d'induction

Deux cas types d'induction peuvent se distinguer. Le premier étant quand les circuits sont immobiles et indéformables, mais le champ magnétique varie dans le temps : On parle d'induction au sens de Neumann. Le second revient au cas où le champ magnétique est homogène et uniforme, mais le circuit change de forme ou se déplace : c'est l'induction au sens de Lorentz.

### Induction au sens de Neumann : expérience des deux bobines l'une dans l'autre

Le schéma du montage est présenté sur la figure 4. Nous alimentons une première bobine avec un courant continu ou alternatif noté $i_1$. Celle-ci génère un champ magnétique $\vec{B_1}$ qui pénètre dans une seconde bobine aux bornes de laquelle nous avons branché un oscilloscope. Tous les circuits ici sont fixes dans le référentiel du laboratoire.

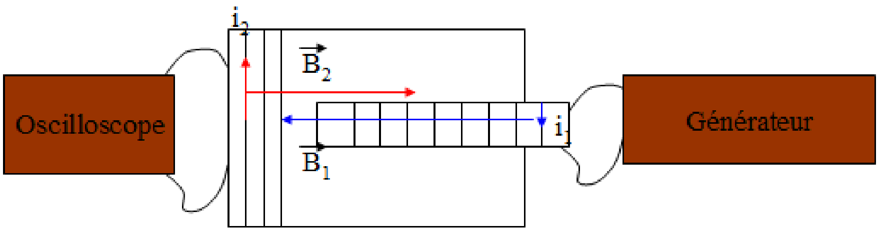


Figure 4: *Deux bobines l'une dans l'autre.*

Effectuons une analyse rapide de ce qu'il se passe. Nous allons tout d'abord supposer que le phénomène d'auto-induction est négligeable, et que le champ magnétique $\vec{B_2}$ créé par la seconde bobine n'influe pas sur le courant $i_1$ (un calcul plus raisonnable pourrait être effectué en séance de TD). Lorsque $i_1$ est constant, nous n'obtenons aucun signal sur dans seconde bobine. Lorsque l'on passe à $i_1 = i_0 \cos(\omega t)$, le champ $\vec{B_1}$ proportionnel à $i_1$ (et calculable avec la loi de Biot et Savart) n'est plus constant. Par conséquent, nous obtenons que : $e_2 = -\frac{dB_1}{dt} S_2 N_2$. C'est à dire que nous obtenons : $i_2 = \alpha\omega \sin(\omega t)$, où $\alpha$ est un coefficient dépendant de la géométrie des bobines (loi de Biot et Savart). C'est exactement ce que nous obtenons : $i_2$ est bien sinusoïdal comme $i_1$. La période est la même. Nous remarquons aussi que l'amplitude de $i_2$ dépend linéairement de la fréquence. Nous pourrions faire des mesures quantitatives pour vérifier ce modèle, ici nous le constatons qualitativement.

Cet exemple nous permet de tirer une loi encore plus générale et fondamentale de l'induction. En effet, comme nous l'avons exposé dans le paragraphe précédent, nous avons :

$$e = \oint_C \vec{E_m} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \iint_{S \in C} \vec{B} \cdot \vec{dS} \tag{11}$$

Soit en ayant $\vec{dS}$ indépendant du temps, et en utilisant le théorème de Stokes, nous transformons la circulation du champ électromoteur en un flux de son rotationnel. Cette équation intégrale étant valable pour n'importe quel contour/surface, nous obtenons au final :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{12}$$

De nos jours, cette équation est connue sous le nom d'équation de Maxwell-Faraday. Il est important de remarquer que, bien que cette équation ait été établie via un support matériel : le circuit électrique, nous n'avons, ici, aucune caractéristique géométrique ou intrinsèque du matériau support. Cette équation est donc valable dans le vide, et en fait d'elle une loi générale de l'électromagnétisme. Un exemple d'application sans support matériel est le bétatron ([1]p248 ou [3]p101) : qui est un accélérateur de particule circulaire qui utilise cet effet de champ électrique tournant ressenti par variation d'un champ magnétique.

### Induction au sens de Lorentz : Rail de Laplace

Ici nous étudions le cas d'une induction au sens de Lorentz. Un cas type est le rail de Laplace présenté sur la figure 5. Un circuit de surface $S_0$ est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. Ce circuit est composé de deux rails espacés d'une distance $l$ et reliées d'un côté par un ampèremètre, et du tige métallique capable de rouler sur les rails. Nous donnons une impulsion à la tige de façon à ce qu'à l'instant $t = 0$ la tige ait une vitesse $\vec{v_0}$.

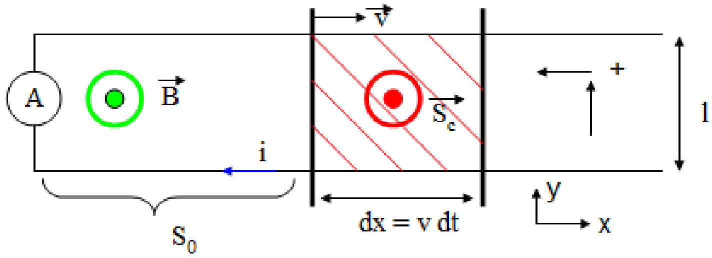


Figure 5: *Exemple du rail de Laplace*

Il y a deux façons de résoudre le problème :

La première façon de voir les choses est de trouver une expression de la surface du circuit $S$ dans la quelle il y a une dépendance avec le temps. Par exemple ici, à l'instant $t$, la surface du circuit est : $S = S_0$. A l'instant $t + dt$, la surface s'est agrandie d'une grandeur $dS = lv(t)dt$, étant la surface coupée par le barreau durant son déplacement : nous retrouvons le résultat du I-B. Ainsi, nous obtenons la force électromotrice induite dans le circuit est : $e = -\frac{d}{dt}(Blv(t)dt)$. Nous pouvons en déduire l'expression du courant induit en fonction de la vitesse du barreau mobile.

La deuxième façon de voir les choses est : une charge présente dans le barreau va subir une force de Lorentz à cause du déplacement du barreau mobile : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\vec{E_m}$. Ici, nous voyons que $\vec{v} \wedge \vec{B}$ correspond à un champ électromoteur ressenti dans le barreau $\vec{E_m}$, cela nous renvoie à la relation établie dans le paragraphe I-A. La circulation de ce champ électromoteur le long du barreau en mouvement nous donne la force électromotrice induite.

Dans les deux cas, nous obtenons le même résultat : un courant négatif. Celui-ci nous permet d'interpréter la loi de Lenz énoncée plus haut. Ici, le flux du champ magnétique augmente au cours du temps. Le courant induit est par convention négatif, c'est à dire que le champ magnétique induite va être dans le sens opposé au premier afin de minimiser le flux du champ total. Un autre façon d'interpréter les choses est de dire que la force de Laplace qui va agir sur le courant induit va s'opposer au déplacement du barreau. L'application du PFD sur le barreau nous permettra de trouver l'équation d'évolution de la vitesse du barreau au cours du temps, et de voir que la vitesse diminue exponentiellement (exemple du freinage électromagnétique). Cela sera traité en TD ([2]p30 et 62).

# III. Auto-induction, induction mutuelle et applications

## A. Auto-induction et induction mutuelle entre deux circuits, tension aux bornes d'un dipôle

Considérons deux circuits de surfaces respectives $S_1$ et $S_2$ et parcourus par les courants $i_1$ et $i_2$ comme indiqué sur la figure 6. Le courant $i_1$ crée un champ magnétique $\vec{B_1}$. Ce champ magnétique a un flux à travers la surface du second circuit. Par définition (loi de Biot et Savart), nous savons que le champ magnétique $\vec{B_1}$ est proportionnel à $i_1$. Le flux du champ magnétique $\vec{B_1}$ à travers la surface $d\vec{S_2}$ est alors proportionnel à $i_1$ tel que :

$$\phi_{1/2} = Mi_1 \tag{13}$$

Où $M$ est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits (de même : $\phi_{2/1} = Mi_2$) qui dépend des caractéristique géométrique des deux circuits, de leur orientation et positions relatives. L'unité de ce coefficient est le Henry de symbole (H).

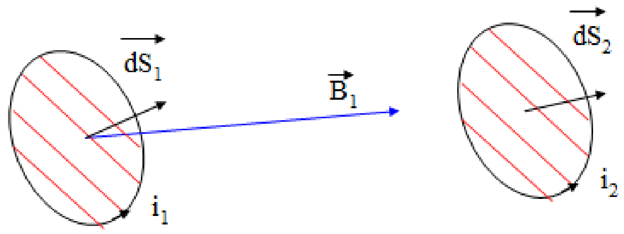


Figure 6: *Deux circuits en induction mutuelle.*

De la même façon, le champ magnétique $\vec{B_1}$ a aussi un flux sur le premier circuit. Ainsi, nous pouvons écrire que $\phi_{1/1} = Li_1$ où $L$ est le coefficient d'auto-inductance du circuit 1 sur lui même. Il ne dépend que de la géométrie de celui-ci. Des exemples peuvent êtres donnés en TD.

Ces phénomènes ont un rôle important en électronique. Prenons par exemple un dipôle schématisé sur la figure 7 parcouru par un courant $i$. Nous savons que la circulation du champ électromoteur sur le contour ACBV nous donne :

$$\oint_{ACBV} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt} = \int_{ACB} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{AVB} \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{14}$$

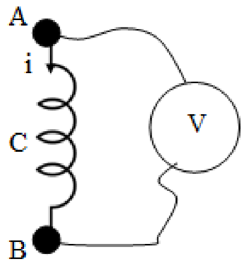


Figure 7: *Schéma d'un dipôle avec un voltmètre.*

Sachant que $\int_{ACB} \vec{E} \cdot \vec{dl} = Ri$ (loi d'Ohm) et que $\int_{AVB} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -U_{AB}$ est la tension opposée mesurée par le voltmètre. Au final, nous obtenons que : $U_{AB} = Ri + \frac{d\phi}{dt}$. Ici, nous avons $\phi = \phi_{int} + \phi_{ext}$ étant les flux propres et champs extérieurs. Au final, nous obtenons une relation bien connue en électronique (en notant $i_k$ les courants des circuits extérieurs influençant le circuit que l'on étudie) :

$$U_{AB} = Ri + L\frac{di}{dt} + \sum_{i_k} M_k \frac{di_k}{dt} \tag{15}$$

Remarque : en multipliant cette équation par $idt$ nous pouvons effectuer le bilan énergétique électrique et magnétique du circuit en question. On montrer alors que l'énergie magnétique emmagasinée par le circuit lui même est $E_m = \frac{1}{2}Li^2$.

## B. Applications

L'induction, et l'auto-induction a de nombreuses applications. Elles peuvent être traitées pendant le cours ou en TD. D'un côté nous avons la production d'électricité avec les Moteurs à induction ([2]) ou les transformateurs [3]p103. La production de chaleur par effet Joule est aussi une bonne application : [4]p293. Le disjoncteur différentiel est une application intéressant et très facile à comprendre et à traiter dans les 4 dernières de la présentation [2]p53. Enfin une application liant électricité et mécanique est donnée par le haut parleur électrodynamique (vraiment très intéressant) [4]p327.

**CONCLUSION :**

Dans cette leçon, nous avons tout d'abord vu qu'un champ magnétique pouvait modifier le courant créé dans un conducteur en mouvement, et que celui-ci pouvait travailler sur ce même conducteur. Ces résultats, bien que peu détaillés sont essentiels pour comprendre l'effet d'un champ magnétique sur des charges. Nous avons ensuite pris une approche expérimentale et historique afin de comprendre le phénomène d'induction électromagnétique pour en déduire une loi fondamentale de l'électromagnétisme. Une suite à ce cours pourrait être de voir l'effet de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$, et ainsi unifier les équations de Maxwell. Enfin nous avons vu l'importance des phénomènes d'induction à travers quelques applications en électronique.

Remarques du correcteur : peut être mettre le I à la fin et mieux traiter l'effet Hall (à voir ici) et traiter totalement le rail de Laplace avec l'équation du mouvement + bilan énergétique.