

## Leçon de physique n°35 : Diffraction de Fraunhofer

Guillaume Simon - 11 avril 2016

**Niveau :** L2

**Prérequis :**

- optique géométrique
- modèle scalaire de la lumière

**Objectifs :**

- décrire le phénomène de diffraction et énoncer le principe de Huygens-Fresnel
- définir les conditions de la diffraction de Fraunhofer
- établir les figures de diffraction de quelques cas simples

La diffraction est un phénomène d'éparpillement de la lumière, plus généralement d'une onde, lorsque celle-ci est matériellement limitée par un obstacle. La lumière diffractée se propage alors dans des directions qui ne sont pas prévues par les lois de l'optique géométrique (démonstration avec un laser et une fente fine).

Elle fut découverte et décrite par Grimaldi au XVII<sup>ème</sup> siècle puis expliquée par Fresnel près de 150 ans plus tard.

Ce phénomène joue un rôle décisif dans la formation des images car tout instrument optique limite l'étendue de l'onde incidente. La diffraction limite donc le pouvoir de résolution de ces instruments.

Dans ce cours, nous allons considérer les phénomènes de diffraction lorsque la source et le point d'observation sont très éloignés de l'obstacle. C'est la diffraction de Fraunhofer ou diffraction à l'infini. Nous considérerons les ondes incidentes et diffractées comme planes. A distance finie, on parle de diffraction de Fresnel.

### I. Le principe de Huygens-Fresnel

- Enoncer le principe de Huygens-Fresnel.
- Considérer une ouverture transparente dans l'air (cf figure ci-contre).
- L'amplitude complexe de l'onde incidente émise par la source S atteignant le point P vaut :

$$\underline{a}_S(P, t) = A_0 \cdot \exp[j(\omega t - k(SP))]$$

avec  $A_0$  l'amplitude réelle,  $\omega$  la pulsation,  $k$  le

vecteur d'onde et  $(SP)$  le chemin optique parcouru par l'onde incidente entre S et P.

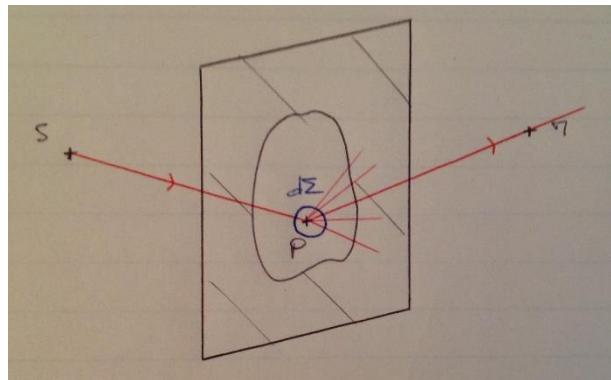
On ne tient pas compte ici de la décroissance de l'amplitude au cours de sa propagation.

- De même, l'amplitude complexe de l'onde émise par l'élément de surface  $d\Sigma$  centré sur P atteignant le point M s'écrit :

$$d\underline{a}_P(M, t) = K \cdot \underline{a}_S(P, t) \cdot \exp(-jk(PM)) \cdot d\Sigma$$

$$d\underline{a}_P(M, t) = K \cdot A_0 \cdot \exp[j(\omega t - k\delta)] \cdot d\Sigma$$

avec  $K$  le facteur d'inclinaison de Kirchhoff et  $\delta = (SPM)$  le chemin optique parcouru par la lumière de la source S jusqu'au point d'observation M.



- Les sources secondaires étant cohérentes, leurs amplitudes complexes sont additives. Par conséquent, l'amplitude complexe en M s'écrit :  $\underline{a}(M) = K \cdot A_0 \iint_{\Sigma} \exp(-jk\delta) \cdot d\Sigma$  en omettant la partie temporelle.

## II. La diffraction à l'infini

Dans ce cas, la source S et le point d'observation M où les rayons diffractés interfèrent sont situés à l'infini.

### A. Amplitude diffractée

- Le chemin optique  $\delta$  est infini dans ce cas. Cependant, c'est le déphasage relatif entre les ondes diffractées qui importe lors de la superposition de celles-ci. Nous allons donc exprimer la différence de marche optique  $\Delta$  entre deux points appartenant à l'ouverture diffractante  $\Sigma$  :  $\Delta = (SPM) - (SOM)$  avec O un point de référence et P un point décrivant  $\Sigma$ .

- Les ondes étant planes, nous avons les égalités suivantes :  $(SP) = (SH)$  et  $(PM) = (H'M)$ .

Ainsi  $\Delta = -(HO) - (OH') = \overline{OH} - \overline{OH'}$ .

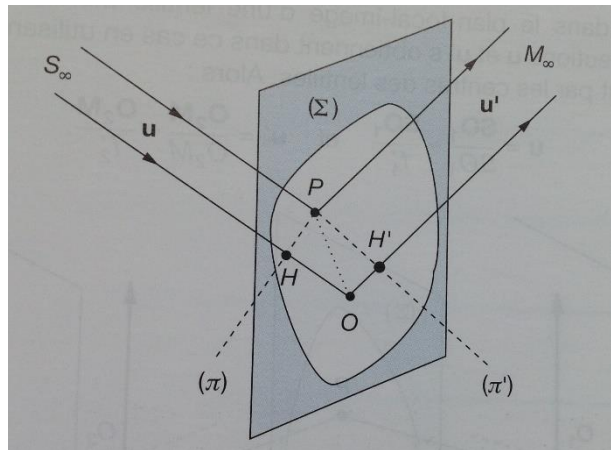
Or  $\overline{OH} = \overline{OP} \cdot \vec{u}$  et  $\overline{OH'} = \overline{OP} \cdot \vec{u}'$  avec  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  les vecteurs unitaires des directions des rayons incidents et diffractés.

Par conséquent :

$$\Delta = (SPM) - (SOM) = \overline{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}')$$

- En insérant cette expression dans l'amplitude complexe issue du principe de Huygens-Fresnel, nous obtenons :

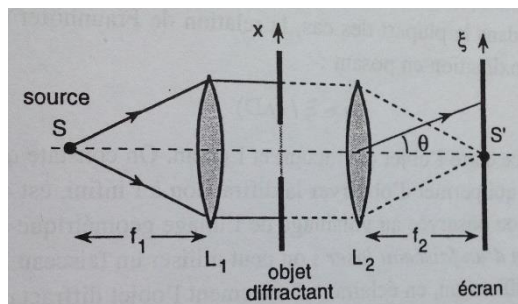
$$\underline{a}(M) = K \cdot A_0 \cdot \exp(-jk(SOM)) \iint_{\Sigma} \exp[jk\overline{OP} \cdot (\vec{u}' - \vec{u})] \cdot d\Sigma$$



### B. Réalisation des conditions de Fraunhofer

- La méthode la plus simple consiste à utiliser un laser comme source à l'infini et un écran suffisamment éloigné de l'ouverture pour l'observation à l'infini.

- Nous pouvons aussi placer une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente et l'écran d'observation dans le plan focal image d'une seconde lentille convergente, l'ouverture étant placée entre les deux lentilles.



### III. Exemples de figure de diffraction

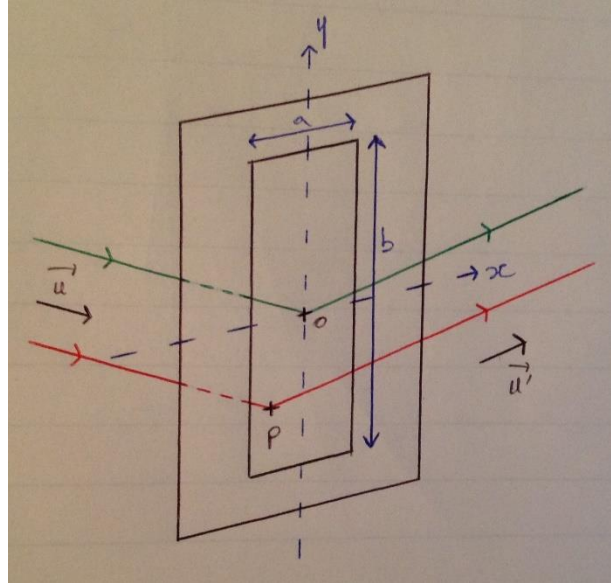
#### A. Ouverture rectangulaire

- Considérons une ouverture rectangulaire centrée en O de longueur a selon l'axe (Ox) et de largeur b selon l'axe (Oy). Notons  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et  $(\alpha', \beta', \gamma')$  les composantes des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , et  $(x, y, 0)$  les coordonnées du point P.

- Nous avons

$$\vec{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}') = x(\alpha' - \alpha) + y(\beta' - \beta)$$

L'amplitude diffractée au point M s'écrit alors après intégration :



$$\underline{a}(M) = K \cdot A_0 \cdot \exp(-jk(SOM)) \cdot a \cdot b \cdot \text{sinc} \left[ \pi(\alpha' - \alpha) \frac{a}{\lambda} \right] \cdot \text{sinc} \left[ \pi(\beta' - \beta) \frac{b}{\lambda} \right]$$

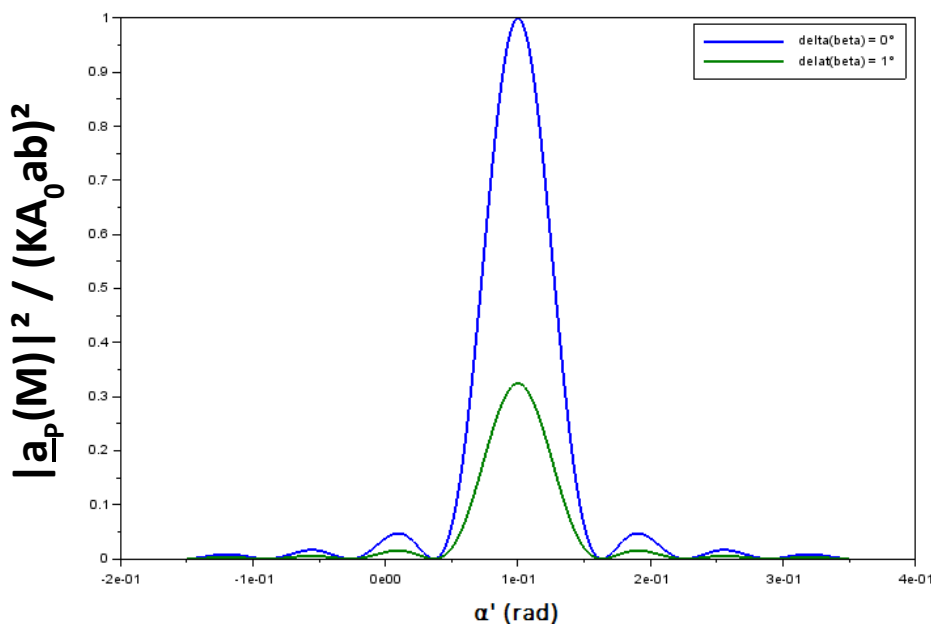
- Le carré du module de l'amplitude de l'onde diffractée vaut ainsi :

$$|\underline{a}(M)|^2 = (KA_0ab)^2 \cdot \text{sinc}^2 \left[ \pi(\alpha' - \alpha) \frac{a}{\lambda} \right] \cdot \text{sinc}^2 \left[ \pi(\beta' - \beta) \frac{b}{\lambda} \right]$$

L'éclairement est proportionnel à cette dernière expression.

- Pour une valeur de  $\beta'$  fixée,  $|\underline{a}(M)|^2$  est maximal en  $\alpha' = \alpha$  et s'annule lorsque  $\alpha' = \alpha + p \frac{\lambda}{a}$ , p étant un entier relatif non nul.

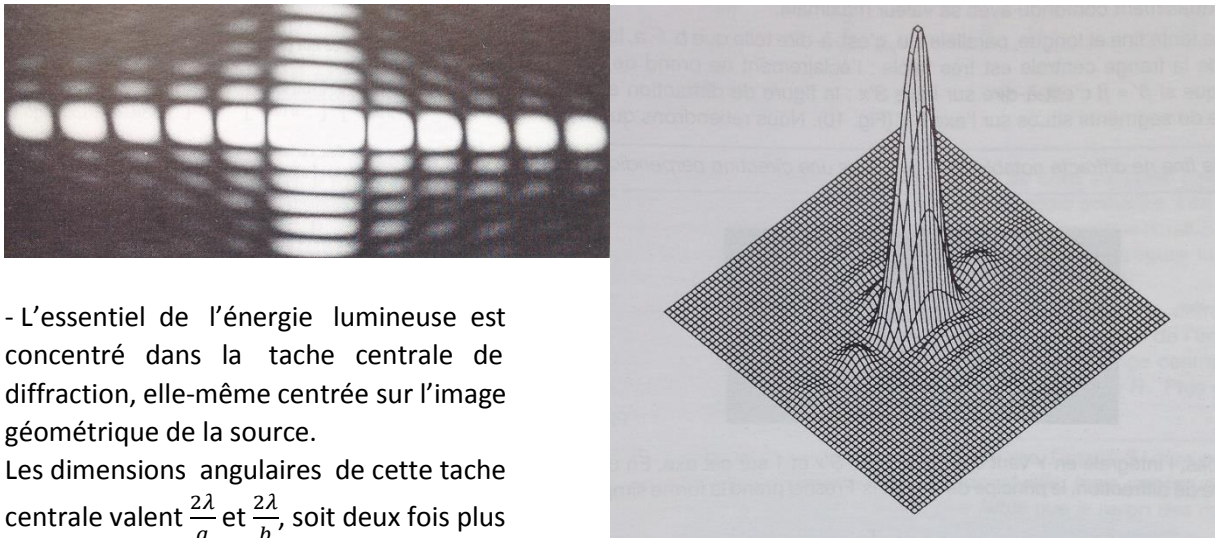
De plus,  $|\underline{a}(M)|^2$  présente des maxima secondaires lorsque  $\alpha' \approx \alpha + (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{a}$ . Ces maxima secondaires sont néanmoins très inférieurs au maximum principal.



- Nous obtenons la même allure pour  $\alpha'$  fixé et  $\beta'$  variable, ainsi qu'en fonction des coordonnées du point M d'observation ramené sur un écran avec une lentille convergente.

- Nous remarquons sur la figure de diffraction et la répartition spatiale de  $|\underline{a}(M)|^2$  (cf figures ci-dessous) que  $|\underline{a}(M)|^2$  est maximal lorsque  $\vec{u}' = \vec{u}$ , c'est-à-dire pour le rayon non dévié. Cela correspond à l'image géométrique  $S'$  de la source S par le système optique utilisé.

Ce résultat se généralise pour toutes les formes d'ouverture : lors d'une diffraction à l'infini,  $|\underline{a}(M)|^2$  est maximal sur l'image géométrique de la source.



- L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentré dans la tache centrale de diffraction, elle-même centrée sur l'image géométrique de la source.

Les dimensions angulaires de cette tache centrale valent  $\frac{2\lambda}{a}$  et  $\frac{2\lambda}{b}$ , soit deux fois plus que les dimensions angulaires des taches secondaires.

De plus, ces dimensions sont inversement proportionnelles aux dimensions de l'ouverture. Ainsi, plus la fente a de faibles dimensions, plus la diffraction est importante.

### B. Fente fine

- Dans ce cas particulier,  $b \gg a$ . Par conséquent, la largeur selon la direction (Oy) de la tache centrale est très faible et nous n'observons plus de taches secondaires dans cette direction.

- En effet, pour  $b \gg a$ ,  $\text{sinc} \left[ \pi(\beta' - \beta) \frac{b}{\lambda} \right] \rightarrow 0$  si  $\beta' \neq \beta$ . Cependant,  $\text{sinc} \left[ \pi(\beta' - \beta) \frac{b}{\lambda} \right] \rightarrow 1$  si  $\beta' = \beta$ .

Dans ce cas,  $|\underline{a}(M)|^2 = (KA_0 a)^2 \cdot \text{sinc}^2 \left[ \pi(\alpha' - \alpha) \frac{a}{\lambda} \right]$ .

La figure de diffraction apparaît comme une succession de taches rectilignes situées sur l'axe orthogonal à celui de la fente.

- Nous observons les mêmes résultats que pour la fente large :

-  $|\underline{a}(M)|^2$  est maximal lorsque  $\vec{u}' = \vec{u}$

- existence de maxima secondaires et de minima

- largeur angulaire de la tache centrale deux fois plus importante que celle des taches secondaires et proportionnelle à l'inverse de a

- Utiliser un laser et une fente de largeur et d'orientation variables pour illustrer ces résultats.

### C. Ouverture circulaire

- De manière analogue, il est possible de calculer l'amplitude d'une onde diffractée par une ouverture circulaire de rayon  $R$ . La figure de diffraction est constituée d'anneaux concentriques centrés sur l'image géométrique  $S'$  de la source  $S$ , alternativement sombres et clairs. L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentré dans la tache centrale, dite tache d'Airy, dont le rayon angulaire vaut  $\theta = 0,61 \frac{\lambda}{R}$ . Cette dimension est là aussi inversement proportionnelle à celle de l'ouverture diffractante.

- Les instruments d'optique comportent souvent des ouvertures circulaires qui diffractent la lumière. L'instrument donne donc d'un objet ponctuel une tache de diffraction centrée sur l'image géométrique de l'objet. Par conséquent, deux objets ponctuels peuvent être distingués avec un instrument si leurs taches de diffraction peuvent être séparées par l'œil.

Le critère habituel pour distinguer deux points objets est que la distance des taches de diffraction soit au moins égale au rayon de ces taches. En terme de rayon angulaire, ce critère, nommé critère de séparation de Rayleigh, s'écrit :  $\Delta\theta \geq 0,61 \frac{\lambda}{R}$ . Le pouvoir de résolution de l'instrument correspond au plus faible écart de rayons angulaires  $\Delta\theta$  permettant de distinguer les deux objets.

**Conclusions :**

- Reprendre rapidement les notions introduites
- La diffraction est un phénomène commun à différents types d'ondes scalaires lorsque les dimensions de l'obstacle ne sont pas élevées par rapport à la longueur d'onde
- Ouverture sur les réseaux

### **Remarques et améliorations :**

- leçon trop formelle, manque des applications
- introduire la transparence  $t(x,y)$  et parler de TF

### **Bibliographie :**

- Physique PC PC\*, S. Olivier, Tec&Doc, Lavoisier
- Optique expérimentale, Sextant, Hermann