

# LP48 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Kévin Ehrhardt

9 octobre 2015

## Niveau

L1

## Prérequis

- Nombres complexes
- Notion de régime transitoire dans les systèmes physiques régis par des équations différentielles linéaires.
- Notions élémentaires des circuits (dipôles R, L et C).

## Objectifs

- Comprendre ce qu'est un phénomène de résonance et son origine physique.
- Remonter à la description mathématique d'une résonance dans les cas usuels (circuit RLC, pendule simple, etc.).
- Être capable de donner des exemples de résonance dans divers champs de la physique.
- Saisir les avantages et/ou les nuisances associés aux phénomènes de résonance selon les cas.

## Plan

### Introduction

Les phénomènes de résonance se manifestent en permanence tout autour de nous, à toutes les échelles et dans des domaines de la physique très variés. L'intérêt, ainsi que le danger potentiel que ces phénomènes peuvent représenter justifient que l'on cherche à les reconnaître, les caractériser et les maîtriser dans la mesure du possible.

Nous nous pencherons donc sur la question de savoir quelles caractéristiques communes partagent tous ces phénomènes de résonance.

## 1 La résonance au travers d'un exemple type : le circuit RLC série

### 1.1 Notion de résonance d'un système

Faisons l'expérience suivante avec un circuit RLC série. Branchons un générateur et réglons-le de manière à délivrer une tension sinusoïdale. Gardons l'amplitude constante, faisons varier la fréquence, et regardons la réponse du système. Pour cela, j'ai branché un oscilloscope aux bornes du condensateur.

On remarque que l'amplitude de la réponse varie, parfois fortement, avec la fréquence d'excitation. Cette amplitude est parfois très supérieure à l'amplitude d'excitation.

Résonance : accroissement significatif de la réponse d'un système à une (ou plusieurs) fréquences particulières, sous une excitation périodique. La résonance se définit aussi par la capacité du système à stocker de l'énergie (on y reviendra).

D'où vient ce phénomène de résonance ?

## 1.2 Origine du comportement résonnant et généralisation

### 1.2.1 Rappels des régimes transitoires

Cas de la décharge d'un condensateur dans le circuit RLC.

Loi des mailles :

$$\frac{d^2}{dt^2}u_c + \frac{L}{R} \frac{d}{dt}u_c + \frac{1}{LC}u_c = 0 \quad (1)$$

On définit deux fréquences caractéristiques,

$$2\tau_d = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (2)$$

qui sont respectivement le taux de dissipation et la fréquence propre du système.

La résolution de l'équation met en évidence trois régimes dépendant du signe du discriminant  $\Delta = \tau_d^2 - \omega_0^2$  de l'équation caractéristique :

—  $\Delta > 0$ , régime aperiodique.

—  $\Delta = 0$ , régime critique.

—  $\Delta < 0$ , régime pseudo-périodique : oscillations libres avec la pulsation  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \tau_d^2}$

### 1.2.2 Oscillations forcées – traitement complexe

Nous nous plaçons maintenant dans la situation où  $e(t) = U \cos(\omega t)$ . On introduit donc une troisième pulsation caractéristique  $\omega$ , qui est la pulsation d'excitation, que l'on peut faire varier librement.

On doit résoudre

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\tau_d \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c &= \omega_0^2 e(t) \\ &= \omega_0^2 U \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Solution :  $u_c(t) = u_c^H(t) + u_c^P(t)$

$u_c^H(t)$  solution de l'équation homogène, décrit le régime transitoire, donc ne nous intéresse pas ici.

$u_c^P(t)$  à trouver, décrit le régime permanent. On confondra  $u_c^P(t)$  avec  $u_c(t)$  dans la suite.

Pour un système linéaire, la réponse possède la même fréquence que l'excitation. Traitement complexe :

On pose  $\underline{u}_c(t) = \underline{U}_c e^{j\omega t}$  ainsi que  $\underline{e}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ .

On obtient le résultat pour le module de  $\underline{U}_c$ , avec  $Q = \omega_0/2\tau_d$  :

$$|\underline{U}_c| = \frac{|\underline{U}|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} \quad (3)$$

L'étude de la fonction donne un maximum pour la pulsation

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (4)$$

donc dans ce cas particulier, il n'y a résonance que si  $Q > 1/\sqrt{2}$ .

Valeur maximale pour module  $|\underline{U}_c|$  :

$$\underline{U}_{c,\max} = \frac{Q^2 U_c}{\sqrt{1/2 + Q^2}} \approx Q U_c \quad (5)$$

Nous venons de mettre en évidence le phénomène de résonance de manière théorique. [Suggestion : faire l'étude de la phase de la même manière].

### 1.2.3 Étude énergétique du système

On part de la loi des mailles, on multiplie par  $i$  pour faire apparaître des puissances.

On obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 \right) = P_G - P_J \quad (6)$$

En régime permanent, le terme de gauche s'annule : l'énergie totale du système est constante. Cela se traduit par  $P_G = P_J$ , la puissance fournie par le générateur ne sert plus qu'à compenser l'effet Joule.

À l'intérieur du système, l'énergie s'échange constamment entre la bobine (partie magnétique) et le condensateur (partie électrique). Cela est possible car les termes associés sont en quadrature.

Plus généralement, on peut aboutir pour un système quelconque au schéma suivant, figure 1.

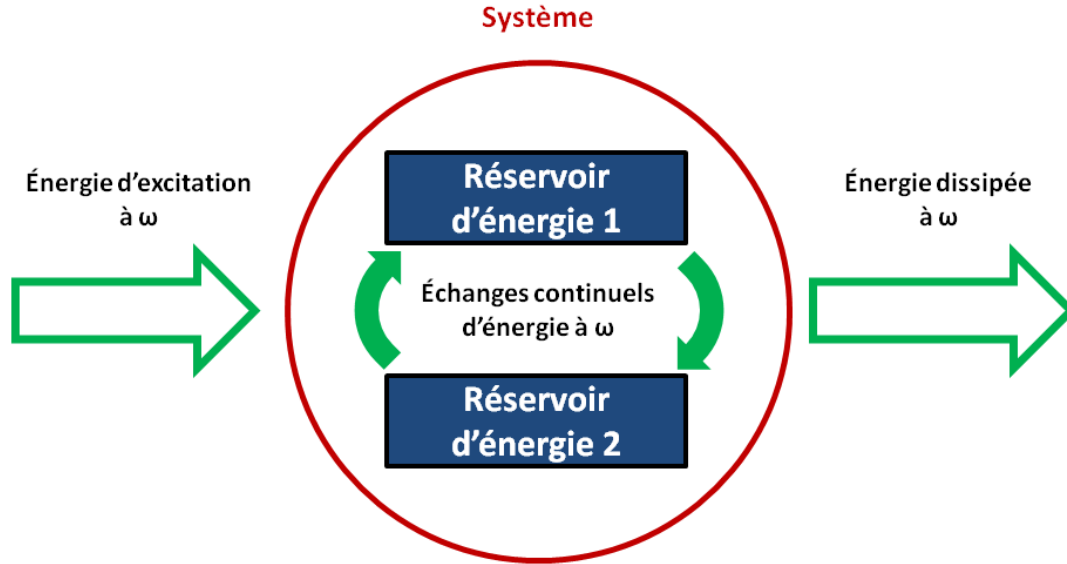


FIGURE 1 – Schéma général d'un système résonant.

Pour obtenir une résonance, système avec 2 réservoirs d'énergies distinctes. Ex : circuit RLC, pendule simple, ressort, interféromètre de Fabry-Pérot, transitions énergétiques entre niveaux d'énergie atomiques.

Résonance atteinte lorsque  $\omega = \omega_0$  : les échanges d'énergie veulent se faire naturellement à  $\omega_0$  ; la synchronisation de l'excitation avec cette fréquence naturelle permet le transfert d'un maximum d'énergie de la source au système sur un cycle.

## 2 Exploiter/Éviter les résonances

Résonances ni néfastes ni bénéfiques dans l'absolu : on peut vouloir les exploiter ou les éviter.

### 2.1 Filtrage sélectif de fréquences

Les systèmes résonnants sont particulièrement sensibles aux fréquences des signaux qu'on leur applique, leur réponse dépend de  $\omega$ . On peut donc faire du filtrage. Filtrer n'est pas le propre d'un système résonnant, mais cette résonance permet d'être très sélectif (si  $Q$  élevé). Notion de bande passante  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .

Application : récepteur radio. Toutes les émissions de radio sont captées par l'antenne, il faut filtrer le signal pour n'en écouter qu'une seule. On peut faire varier  $\omega_0$  pour changer de station.

Manip : filtrage mécanique à l'aide de tiges métalliques liées à une toupie.

## 2.2 Fortes amplitudes – application aux métamatériaux

Exploitation des fortes amplitudes de résonance pour obtenir des propriétés inédites à l'échelle macroscopique vis-à-vis de la propagation des ondes (au sens large). [Partie jugée trop ambitieuse]

## 2.3 « Déplacer » les résonances mécaniques néfastes : couplage d'oscillateurs

On peut modéliser un immeuble grossièrement par une masse couplée à un ressort. Système sensible aux secousses sismiques. On couple un second système masse + ressort au premier : le système global présente des fréquences de résonance différentes des systèmes individuels. On déplace ainsi les résonances en fréquence et le système à protéger (immeuble) n'est plus sensible aux secousses.

## Conclusion

Lors de ce cours, nous avons vu que les phénomènes résonnants pouvaient apparaître dans les systèmes constitués de deux réservoirs d'énergies distinctes. Ces phénomènes se manifestent alors lorsque la fréquence d'excitation se rapproche d'une des fréquences propres du système, c'est-à-dire de l'un des taux de transfert d'énergie naturels entre ses réservoirs.

Nous avons ensuite montré comment ces phénomènes pouvaient être modélisés théoriquement, et cette modélisation nous amène naturellement à la notion de filtrage, que nous pourrions ainsi développer lors d'un cours ultérieur. En plus du caractère sélectif des résonances dans le domaine fréquentiel, nous avons vu que les résonances pouvaient être exploitées pour leur aspect amplificateur afin de générer des réponses d'amplitude très importante, aspect exploité jusque dans des domaines de recherche très récents (métamatériaux). Enfin, ce même aspect pouvant être responsable de lourds dégâts du système considéré, nous avons illustré le déplacement en fréquence d'une résonance par le couplage avec un second système résonnant, de manière à protéger le système principal. Une fois encore, cette notion pourra servir de socle à un cours ultérieur sur les oscillateurs couplés.

## Bibliographie

- [1] Physique, MPSI-PCSI-PTSI, M.Cavelier, J.Cubizolles et al, VUIBERT
- [2] Les Nouveaux Précis, MPSI-PCSI-PTSI, P.Brenders, C.Clerc et al, BRÉAL