LP n° 48 : Phénomènes de résonance dans divers domaines de la physique

Clément Bernard

03/10/2016

Niveau

L2

Prérequis

— Notion élémentaires des circuits électriques (dipôles passifs)

— Connaissance des systèmes oscillants à un degré de liberté

— Opération sur les nombres complexes

Objectifs

— Comprendre l'origine d'un phénomène de résonance

— Aborder la résonance de systèmes à plusieurs degrés de libertés

— Aborder la notion de gestion de la résonance, qu'elle soit bénéfique ou problématique

Plan

A Introduction

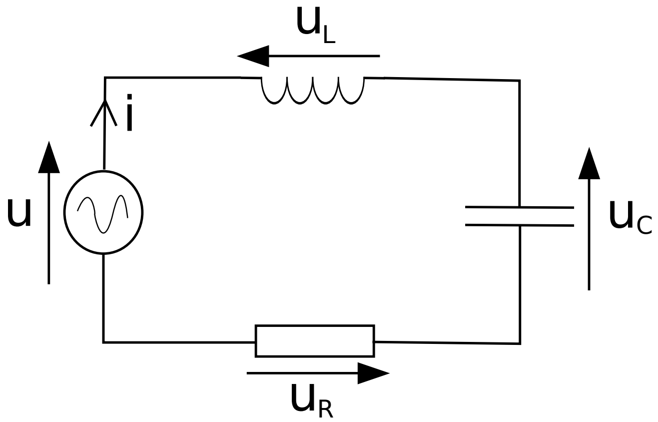
L'objet de la leçon sera d'observer, de comprendre et si possible d'être capable d'utiliser ce phénomène dans divers domaines de la physique.La résonance étant par définition une réponse particulière d'un système à une fréquence donnée. Il a déjà été observé en L1 que le fait de décharger un condensateur dans un circuit RLC série faisait ressortir une pulsation propre du système, nous allons donc montrer maintenant que lorsque ce même circuit est alimenté à cette même fréquence, il va effectivement résonner. On observe ce phénomène de résonance aussi bien en électricité qu'en mécanique ou en optique. En électricité, tout système incluant un effet capacitif et inductif aura une fréquence de résonance, on pourra observer que c'est le cas de tout circuit, mais que pour un circuit ne contenant qu'une résistance réelle, les valeurs de capacité et d'inductance sont tellement faible que cette fréquence de résonance est bien trop élevée pour être observée avec du matériel classique. De même, en mécanique on suppose souvent un solide parfaitement indéformable. Il s'agit là toujours d'une approximation, les solides pouvant toujours se déformer de manière plus ou moins négligeable selon leur nature. Cette rigidité presque parfaite des solides étudiés conduit à des fréquences de résonance tellement élevées que celle-ci ne sont habituellement pas observées. On peut inclure dans la mécanique l'étude des ondes acoustiques, nous verrons une explication à leur origine à la fin de cette leçon. En optique, un objet utilise à la fois le phénomène des ondes stationnaires et les phénomènes résonants que sont l'absorption et l'émission stimulée d'un photon : le LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

Cette résonance mérite d'être étudiée car elle permet en électricité de traiter les signaux (filtrage, modulation, démodulation...), en mécanique de prévoir la réaction d'un système face aux fréquences auquels il risque d'être agité (étude sismique, résistance mécanique...), et en optique afin de permettre des mesures précise par l'utilisation de rayonnements très bien définis.

Dans le cadre de cette leçon, il ne sera abordé que les phénomènes de résonance électromagnétique et élastique. Les résonances géométriques ainsi que les résonances d'absorption ne seront abordées que de manière qualitative si besoin est de faire des analogies afin de simplifier la compréhension du phénomène.

B Première partie : Systèmes à un degré de liberté

B.1 Le circuit RLC Série



En appliquant la loi des mailles à un tel circuit, on obtient : $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

Sachant que $u_L = L\frac{di}{dt}$, $u_C = \frac{q}{C}$ et $u_R = Ri$

On écrit l'équation en fonction de q, avec $i = \frac{dq}{dt}$, on a donc :

$$u_0 cos(\omega t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \tag{1}$$

Il s'agit d'une équation linéaire à coefficients constants. Et on s'intéressera uniquement à la solution pour le régime permanent, cela nous permet d'écrire l'équation sous forme complexe en associant à $u = u_0 cos(\omega t)$ une grandeur complexe $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$.

$$\underline{u} = -L\omega^2\underline{q} + Rj\omega\underline{q} + \frac{q}{C}$$

$$\underline{q} = \frac{\underline{u}}{-L\omega^2 + Rj\omega + \frac{1}{C}}$$

or $\underline{i} = j\omega\underline{q}$ donc

$$\underline{i} = \frac{\frac{\underline{u}}{R}}{1 + j(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})}$$

l'amplitude de i est telle que :

$$|\underline{i}| = \frac{\frac{u_0}{R}}{\sqrt{1 + (\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})^2}}$$

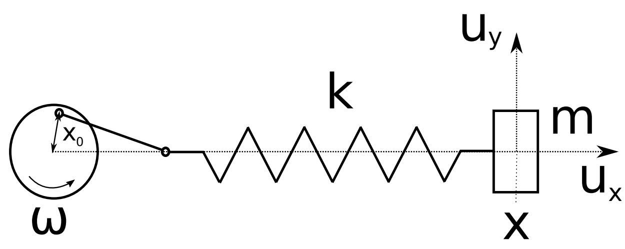
La valeur minimale du terme en racine est 1, on a donc une valeur de module maximale lorsque le terme entre parenthèse est nul.

Soit $\frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega}$, ou $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

On trouve donc une intensité max en fonction de la pulsation, c'est la résonance.

B.2 Système d'une masse attachée à un ressort

Pour un système mécanique, on pourra s'intéresser au système suivant :



Sur la masse de coordonnée $x = 0$ lorsque le système est au repos et que le moteur présente une phase $\phi = \frac{\pi}{2}$, on considère la force suivante : la force de rappel du ressort $\vec{K}$. On va supposer le mouvement en x seulement, le poids et la réaction du sol ne seront donc pas pris en compte. Par ailleurs les frottements seront négligés et le référentiel supposé galiléen.

On applique donc le principe fondamental de la dynamique à notre masse :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0cos(\omega t))$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0cos(\omega t)$$

De même, en ne s'intéressant qu'à la solution permanente on peut substituer x par $\underline{x}$, forme complexe de x.

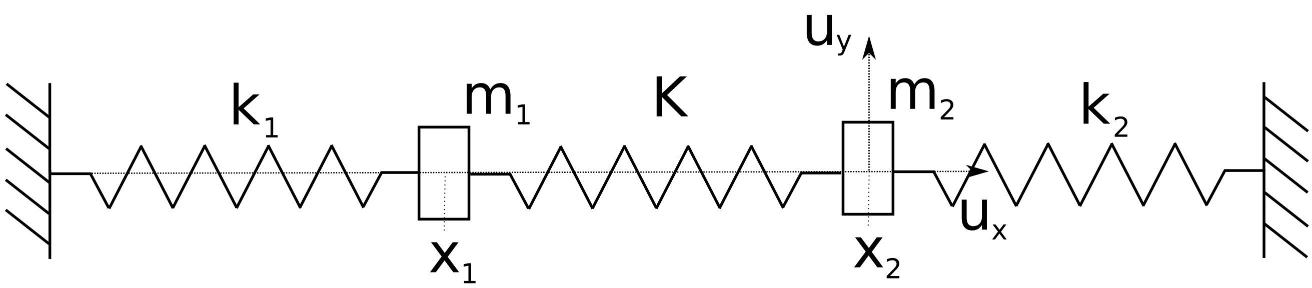
$$-\omega^2\underline{x} + \frac{k}{m}\underline{x} = \frac{k}{m}x_0e^{j\omega t}$$

Soit

$$|\underline{x}| = \frac{\frac{k}{m}x_0}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

On observe donc un maximum d'amplitude de x pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

C Deuxième partie : système à deux degrés de liberté



On a, comme force s'appliquant en x sur la masse 1, la force de rappel du ressort 1 $\overrightarrow{R_1}$ et celle du ressort 2 $\overrightarrow{R_2}$. De manière similaire, on a les forces de rappels s'appliquant à m_2. On ne prend pas en compte poids et réaction du sol car le mouvement est purement en x, aussi le référentiel est supposé galiléen et les frottements sont négligés.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2)$$

Soit :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1(k_1 + K) - K x_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2(k_2 + K) - K x_1 = 0$$

C.1 Recherche des fréquences de résonance du système

De la même manière que précédemment, on va s'intéresser aux solutions permanentes du système, on écrit donc la forme complexe des équations précédentes.

$$x_1(-m_1\omega^2 + (k_1 + K)) - K x_2 = 0$$

$$x_2(-m_2\omega^2 + (k_2 + K)) - K x_1 = 0$$

Par substitution on trouve :

$$x_1 = \frac{K x_2}{-m_1\omega^2 + (k_1 + K)}$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - ((k_2 + K)m_1 + (k_1 + K)m_2)\omega^2 + k_2 k_1 + K k_1 + K k_2 = 0$$

Il existe donc 2 solutions positives pour ω, ce seront les pulsations de résonances ω_1 et ω_2. Le résultat n'a que peu d'intérêt sans application numérique, nous nous intéresserons donc à une solution dans la section suivante

C.2 Modification des pulsations de résonance mécanique par couplage d'oscillateurs.

On va maintenant supposer que le système à deux degré de liberté est en fait le ressort et la masse de la première partir adjoint d'un masse identique et de deux ressorts de raideur K, donc $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k$ et $k_2 = K$.

On a donc les pulsations propres suivant l'équation suivante :

$$\omega^4 - \frac{(k + 3K)}{m}\omega^2 + \frac{2kK + K^2}{m^2} = 0$$

Soit

$$\omega_{0,1}^2 = \frac{3K + k \pm \sqrt{5K^2 + k^2 - 2kK}}{2m}$$

On peut remarquer qu'à moins d'avoir $K = k$, les pulsations propres du système complet seront chacune différentes de la pulsation propre du système simple. On peut donc "déplacer" une fréquence de résonance mécanique (ou électrique) en ajoutant un système résonant lié au premier. Cela permet de modifier la sensibilité d'un bâtiment à une gamme de fréquence donnée, ou de modifier les propriété d'un filtre électronique selon le besoin. Une étude de fonction montre que

D Troisième partie : Systèmes à n degrés de libertés

D.1 Modélisation d'une corde élastique

Une corde élastique peut se modéliser comme une suite de systèmes masse-ressorts équivalents et attachés les uns aux autres.

On va supposer des oscillations non-amorties, donc on peut écrire le Principe fondamental de la dynamique de la même manière qu'au chapitre précédent, pour tous les systèmes masse ressort de la suite (tous sont de masse m et tous les ressorts sont de raideur k, la corde est supposée homogène :

$$m\ddot{x}_m + \sum_{n=1}^{N} kx_n = 0$$

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\underline{M\ddot{x}} + \underline{Kx} = 0$$

On ne s'intéresse qu'au régime permanent, donc :

$$-\omega^2\underline{Mx} + \underline{Kx} = 0$$

où $\underline{M}$ et $\underline{K}$ sont des matrices de taille n^2 et telles que $\underline{M} = \underline{M}^T$ et $\underline{K} = \underline{K}^T$
Une solution de ω_n existe quand le déterminant est nul. Il y a n solutions au problème.

D.2 Résonances acoustiques

Une corde homogène pouvant se modéliser par une suite infinie de systèmes masses-ressorts identiques infiniment petits, il est possible d'écrire les solutions ω_n sous la forme :

$$\omega_n = n\sqrt{\frac{k}{m}}$$

où K est une constante à déterminer. Ce type de résonance est une résonance acoustique. Ce type de résonance peut être extrêmement complexe, voir impossible à résoudre de manière analytique si le milieu n'est pas homogène ou linéaire, mais ce modèle permet de répondre à quelques questions simples sur l'origine des n résonances acoustiques d'un milieu.

Conclusion(s)

Nous n'avons pas parlés dans cette leçon des résonances optique ou microscopiques. La résonance optique est en effet un filtrage de fréquence par la géométrie d'un milieu qui ne peut pas être expliquée par la présence de ressorts microscopiques.

Les résonances microscopiques auraient aussi pu être développées, il s'agit de la réaction d'un électron sur un atome à une excitation de fréquence telle que l'énergie apportée par l'onde incidente est très proche de celle demandée par cet électron pour changer d'état quantique. Les deux phénomènes en questions sont l'absorption et l'émission stimulée. L'émission stimulée permet au laser d'amplifier la lumière d'une fréquence donnée en l'émettant dans la même direction que l'onde incidente, ce qui évite la dispersion du rayon dans le LASER même. Ce phénomène de résonnance est lié à la qualité quantique des états d'énergie des électrons.

Bibliographie

[1] C.More et D. Augier : Compétence prépa PCSI Physique, chap. 1 à 5

[2] H. Djelouah : Vibrations et Ondes mécaniques, chap 5 à 8