Etude de la période d'un pendule simple

Préparation à l'Agrégation de Physique – ENS Cachan

June 3, 2002

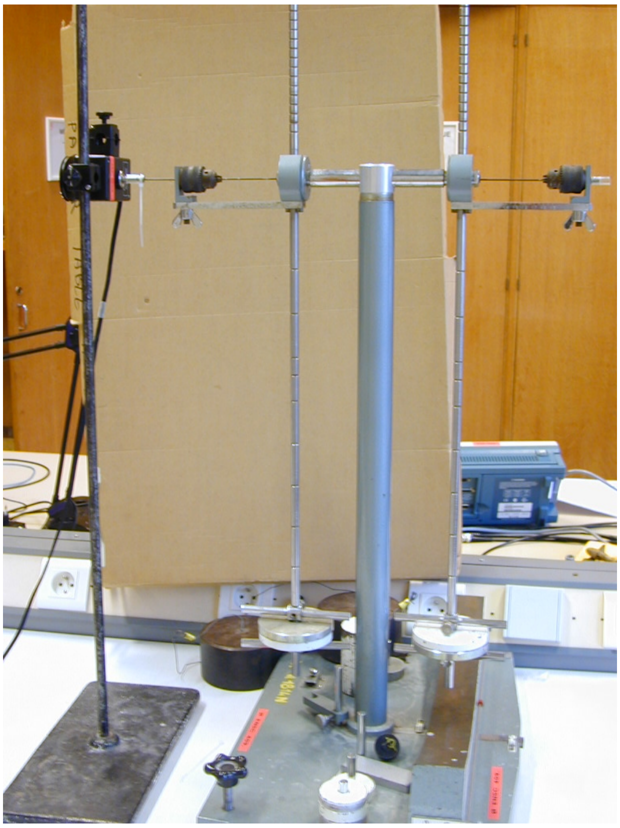

Figure 1: Photographie du dispositif expérimental pour étudier la variation de la période d'un pendule en fonction de l'amplitude des oscillations. On utilise le système de pendules couplés DIDALAB, dans lequel on découple les deux pendules. L'angle d'oscillation, ainsi que la vitesse angulaire, sont mesurés dans cet exemple au moyen du capteur de rotation PASCO.

Contenu

1 Rappels théoriques

1.1 Période d'oscillation du pendule

Considérons un pendule simple pouvant osciller dans le plan vertical comme représenté sur la figure 2. Il correspond à une masse m suspendue par un fil (ou une tige de masse nulle) de longueur l, la position du pendule par rapport à la verticale étant repérée par l'angle θ.

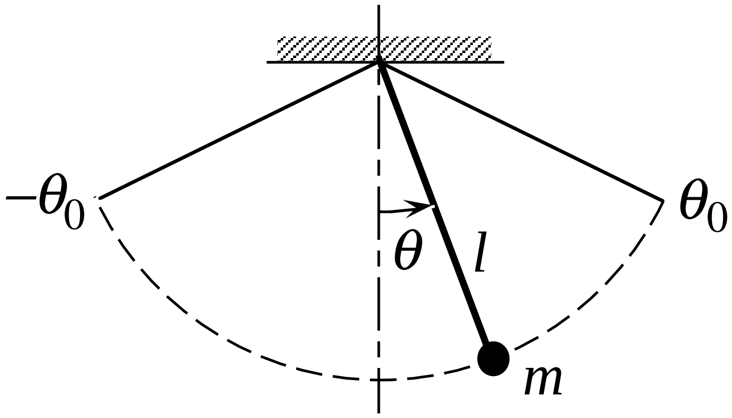

Figure 2: Oscillations d'un pendule pesant simple.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} \;=\; -\frac{g}{l}\,\sin\theta\,. \tag{1}$$

A la limite où $\sin\theta \approx \theta$, cette équation prend la forme d'un mouvement harmonique, avec pour période des oscillations :

$$T_0 \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

Nous allons chercher à remplacer cette solution approchée par une forme qui reste valable, quelque soit l'amplitude θ_0 des oscillations. Une intégrale première du mouvement est donnée par l'énergie mécanique totale E_M du pendule, qui s'écrit en fonction de l'amplitude angulaire θ_0 du mouvement d'oscillation :

$$E_\mathrm{M} \;=\; \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \;-\; mgl\cos\theta \;=\; -mgl\cos\theta_0 \tag{3}$$

Si on s'intéresse à la partie du mouvement où θ croît de $\theta = 0$ jusqu'à la valeur maximale θ_0 (c'est-à-dire $\dot{\theta} > 0$), nous pouvons par conséquent déterminer à chaque instant la vitesse angulaire du pendule :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \;=\; \omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)} \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Sur cette partie du mouvement du pendule, on peut alors séparer les deux variables

$$\omega_0\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

soit, en utilisant l'identité trigonométrique $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2$:

$$\omega_0\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \tag{4}$$

Il est maintenant commode de poser

$$k \;=\; \sin\frac{\theta_0}{2} \tag{5}$$

et d'introduire une nouvelle variable angulaire ϕ, définie par la relation

$$\sin\frac{\theta}{2} \;=\; k\,\sin\phi \tag{6}$$

et qui varie entre $\phi = 0$ pour $\theta = 0$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ pour $\theta = \theta_0$. Ce changement de variable conduit à :

$$\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} \;=\; k\cos\phi$$

En reportant ces deux expressions dans l'Éq.(4), on obtient

$$\omega_0\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

d'où par intégration entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$:

$$\frac{T}{T_0} \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{7}$$

Cette équation fait apparaître l'intégrale complète elliptique de première espèce, définie par

$$K(k) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{8}$$

qui peut être évaluée numériquement à l'aide d'un logiciel de calcul formel[1]. La variation de la période réduite $T^* = T/T_0$ en fonction de θ_0 est représentée sur la figure 3. On remarque que pour $\theta_0 = \pi$, la période devient infinie.

1.2 Formule de Borda

Pour $k \leq 1$, l'Éq.(7) peut se mettre sous la forme d'un développement en puissance de k :

$$\frac{T}{T_0} \;=\; 1 \,+\, \frac{1}{4}k^2 \,+\, \frac{9}{64}k^4 \,+\, \cdots \qquad \text{avec} \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

A la limite des petits angles θ_0, cette expression prend la forme

$$\frac{T}{T_0} \;=\; 1 \,+\, \frac{1}{16}\theta_0^2 \,+\, \frac{11}{3072}\theta_0^4 \,+\, \cdots$$

où le développement à l'ordre 2 en θ_0 correspond à la formule célèbre de Borda, utilisée historiquement pour corriger l'isochronisme des petites oscillations d'un pendule simple :

$$\frac{T}{T_0} \;\approx\; 1 \,+\, \frac{1}{16}\theta_0^2 \tag{9}$$

[1]Ainsi dans Mathematica, on obtient $K(k)$ à l'aide de la commande `EllipticK[m]`, avec $m = k^2$. Avec Maple, la même commande s'écrit `EllipticK`. Il est nécessaire de vérifier la définition utilisée pour l'argument de cette fonction, car il en existe malheureusement plusieurs définitions.

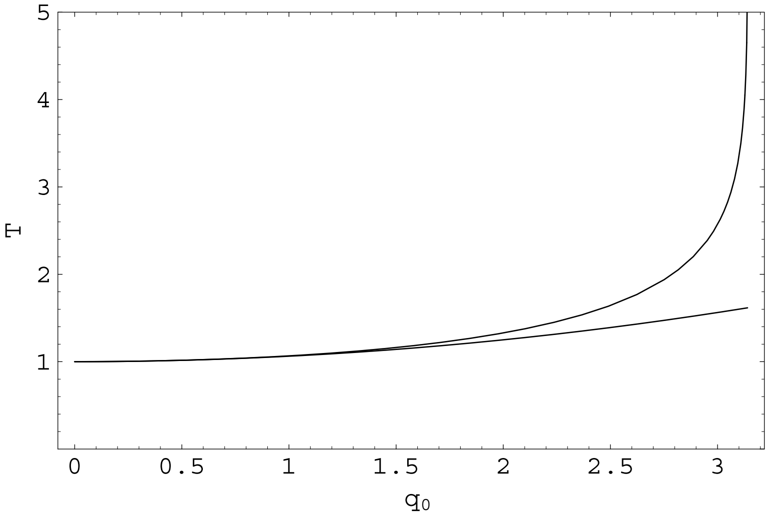

Figure 3: Période normalisée $T^* = T/T_0$ du pendule, en fonction de l'amplitude d'oscillation θ_0 donnée en radians. La deuxième courbe, qui ne présentee pas de divergence pour $\theta_0 = \pi$, correspond à la formule approchée de Borda.

1.3 Mouvement du pendule : angle de rotation et vitesse angulaire

Reprenons le calcul précédent, en prenant comme condition initiale $\phi = 0$ à $t = 0$. A l'instant t, l'angle ϕ est défini implicitement par l'équation

$$\omega_0 t \;=\; u \;=\; F(\phi, k) \qquad \text{avec} \qquad F(\phi, k) \;=\; \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \tag{10}$$

où $F(\phi, k)$ est l'intégrale elliptique de première espèce, dont on trouve la définition dans tout livre d'outils mathématiques pour la physique. Le paramètre k correspond au module ($k = \operatorname{mod} u$) de l'intégrale, tandis que ϕ se réfère à l'amplitude ($\phi = \operatorname{amp} u$) de l'intégrale. Là encore, la valeur numérique de la fonction F peut être calculée directement dans un logiciel de calcul formel [2].

L'Éq.(10) définit la relation $t(\phi)$, que nous devons par conséquent inverser de manière à obtenir $\phi(t)$. Nous allons ainsi avoir besoin d'introduire une nouvelle fonction spéciale : la fonction elliptique de Jacobi. En effet, l'angle θ que fait le pendule avec la verticale à l'instant t est relié au paramètre ϕ par :

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \sin\phi \qquad \text{soit} \quad \sin\frac{\theta}{2} = k \sin(\operatorname{amp}(u)) = k \operatorname{sn}(u)$$

où $\operatorname{sn}(u)$ est la fonction elliptique sinus de Jacobi. Comme $u = \omega_0 t$, nous avons ainsi :

$$\theta \;=\; 2 \operatorname{Arcsin}\left(k \operatorname{sn}(\omega_0 t)\right) \tag{11}$$

Cette équation, qui est pour le moins peu transparente, donne la relation cherchée $\theta(t)$. Là encore, tout cela se calcule sans difficulté à l'aide d'un logiciel de calcul formel [3].

[2] Dans Mathematica, la commande s'écrit `EllipticF[`ϕ`,m]`, où ϕ est exprimé en radian et $m = k^2$.

[3] Ainsi, la valeur numérique de la fonction $\operatorname{sn}(u)$, pour le paramètre k, s'obtient dans Mathematica par la commande `JacobiSN[u,k]`. Cette fonction a également une symétrie correcte, de sorte que la solution est valable quelque soit t, et non uniquement dans l'intervalle $[0, \frac{T}{4}]$ auquel nous avons restreint notre étude.

La figure 4(a) donne l'évolution de l'angle d'oscillation θ, normalisé à sa valeur maximale θ_0, pour trois valeurs du paramètre θ_0. Le temps t est normalisé à la période d'oscillation T, laquelle dépend également de θ_0 comme nous l'avons vu précédemment. On voit apparaître ce que l'on constate expérimentalement : plus l'amplitude des oscillations est grande, et plus le pendule passe de temps au voisinage de $\pm\theta_0$.

Une fois déterminée la variation de l'angle d'oscillation $\theta^*(t^*)$, on en déduit également la vitesse angulaire du mouvement d'oscillation pendulaire

$$\omega^* \; = \; \frac{\mathrm{d}\theta^*}{\mathrm{d}t^*}$$

qui est représentée sur la figure 4(b). On constate que pour les très grandes amplitudes du mouvement, la forme de la courbe $\omega^*(t^*)$ s'éloigne très nettement de la variation sinusoïdale qui correspond à l'approximation harmonique.

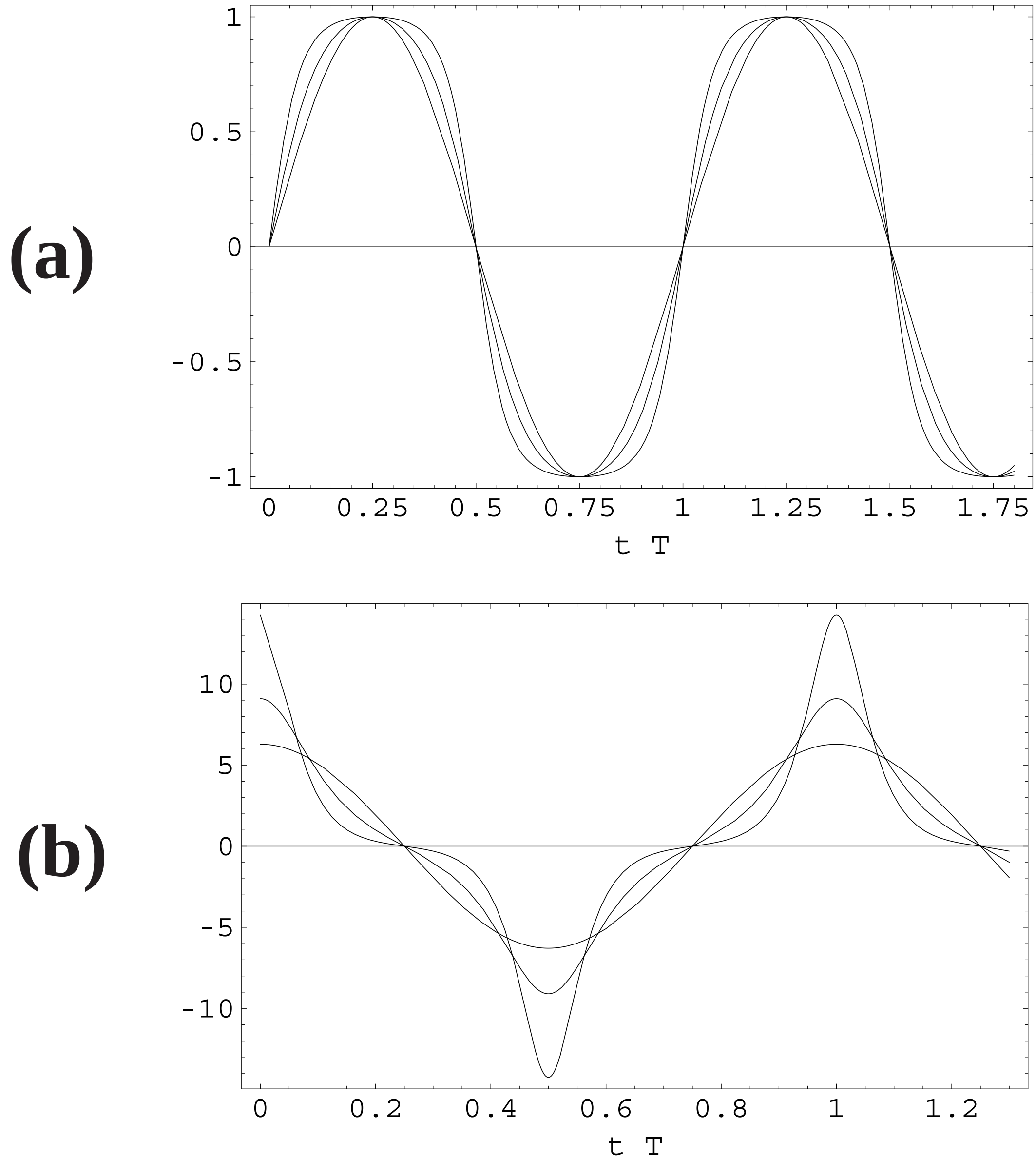

Figure 4: **(a)** Représentation de $\theta^*(t^*)$ (a) avec les paramètres normalisés $t^* = t/T(\theta_0)$ et $\theta^* = \theta/\theta_0$. Les trois courbes correspondent respectivement à $\theta_0 = 18°$, $\theta_0 = 162°$ et $\theta_0 = 178°$. **(b)** Représentation de la vitesse angulaire ω^* pour les trois mêmes valeurs du paramètre θ_0.

2 Utilisation du fichier Igor "Borda.pxt"

On mesure la période du pendule pesant pour différentes valeurs de l'amplitude des oscillations. Cette mesure peut être effectuée à l'aide d'un simple chronomètre, ou bien de manière plus "moderne" en enregistrant $\theta(t)$ au moyen d'un capteur de rotation (PASCO, VSCOPE, ...). On mesure également, de manière indépendante, la période T_0 des oscillations aux petits angles, de manière à déterminer ce paramètre avec la précision la plus grande possible.

On obtient ainsi un tableau de mesures, dans lequel vont figurer plusieurs couples de points expérimentaux $(\theta_0, T^* = T/T_0)$.

Il suffit ensuite d'ouvrir le fichier `Borda.pxt`. On voit alors apparaître une fenêtre, qui est reproduite sur la figure 5. Il n'y a plus qu'à y ajouter les points expérimentaux pour comparer ces mesures aux résultats théoriques donnés par les Éqs. (7) et (9).

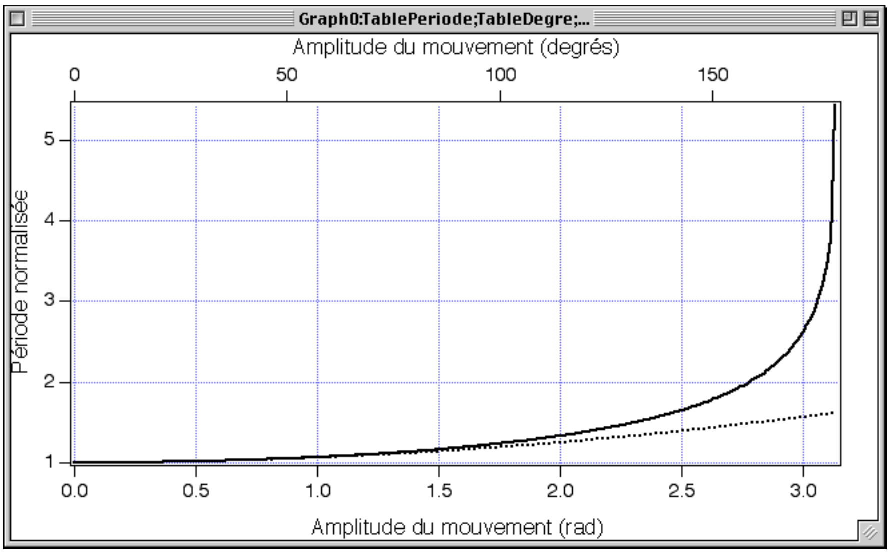

Figure 5: Fenêtre apparaissant dans le fichier ouvert sous IGOR. La courbe en trait plein correspond à la formule théorique donnant la période d'oscillation du pendule, quelque soit l'amplitude de ses oscillations. La courbe en pointillé représente l'approximation de Borda de la période du pendule.

Le tableau `Table0` de ce fichier IGOR affiche pour la valeur de l'angle θ_0 en degré, qui correspond à la colonne `Point`, les valeurs correspondentes de la période réduite T^* et celle obtenue par la formule approchée de Borda. Ces valeurs sont stockées respectivement dans les "waves" `TablePeriodeDeg` et `TableEcartBorda`. La dernière colonne `EcartBorda` correspond à l'écart, exprimé en %, entre ces deux waves :

$$\texttt{EcartBorda} = \frac{\texttt{TablePeriodeDeg} - \texttt{TableEcartBorda}}{\texttt{TablePeriodeDeg}} .$$

Références bibliographiques

[1] W. KINZEL and G. REENTS, *Physics by Computer*, Springer (1996).
Voir la section 1.2 "The nonlinear pendulum".

[2] G. LE BRIS, *Maple Acid*, Cassini (2001).
Voir le Chapitre 2 sur l'étude du pendule pesant.