

Montage 32 : Couplage des oscillateurs

Nicolas-Alexandre Goy

Le 23 Mai 2017

Bibliographie :

- [1] : *Dictionnaire de physique expérimentale Tome 1 : Mécanique et Tome 4 : Electricité*, L. Quaranta, Édition Pierrons
[2] : *Expériences de physique aux concours de l'enseignement (les deux tomes en 4e Edition de 2016)*, Bellier-Bouloy-Guéant, Édition Dunod
[3] : *Mécanique : Fondements et applications*, J-P. Pérez, Editions Dunod

INTRODUCTION : Habituellement, nous cherchons à caractériser les états propres d'un oscillateur, que ce soit en optique, en électronique ou en mécanique. Lorsque cet oscillateur interagit avec un autre oscillateur, ces deux là se couplent pour former l'équivalent de deux oscillateurs "indépendants" et différents de leur état initial. Le couplage des oscillateurs peut effectivement donner lieu à une multiplication de fréquences propres, voire à la propagation d'une onde lors d'un couplage à N oscillateurs. Notre but ici est de l'observer et de le quantifier.

I. Couplage mécanique par "élasticité" : deux pendules pesant couplés par torsion

A. Étalonnage du système

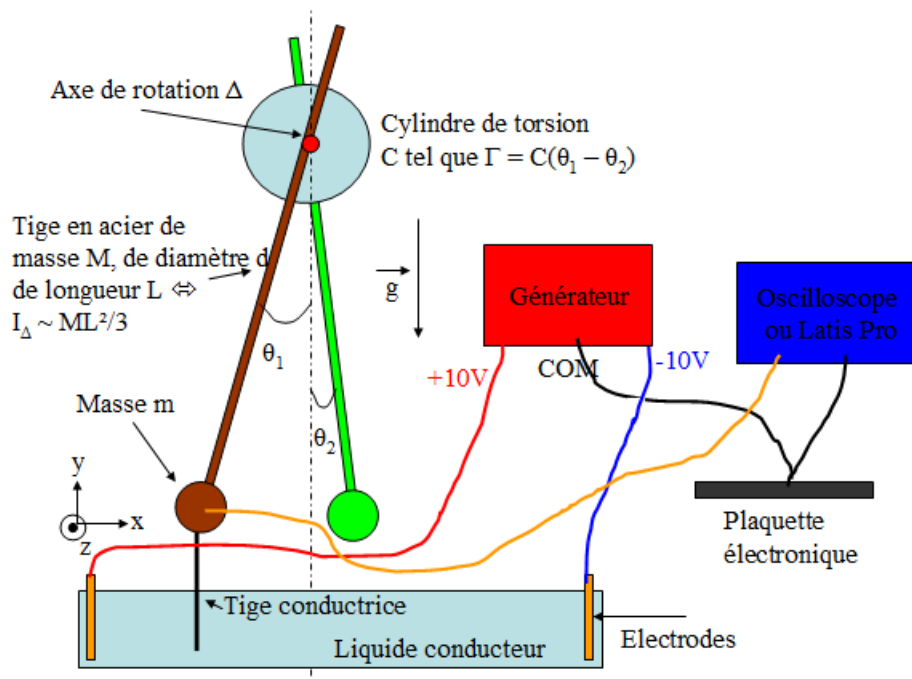


Figure 1: Schéma du système à étudier.

On réalise le montage présenté sur la figure 1 : deux pendules pesants identiques sont couplés par un (gros) fil de torsion. On repère leur position par leur angle respectifs θ_1 et θ_2 . Ces pendules pesants sont constitués : d'une tige en acier (masse volumique $\rho \approx 7800\text{kg}/\text{m}^3$), de diamètre

$d = 1\text{cm}$ et dépassent d'un côté de l'axe de rotation Δ de $l = 28\text{cm}$ et de l'autre de $L = 57\text{cm}$ et a un moment d'inertie I_t ; et d'une masse m située à une distance L de l'axe Δ donnant une contribution au moment d'inertie totale de $I_m \approx mL^2$. Ici toutes les mesures de masses sont données à une précision au dixième de gramme près et les longueurs à 2 millimètres près.

La position de la petite masse du premier pendule suivant l'axe x (donnant l'angle $\theta \sim \frac{x}{L}$ quand celui-ci est petit) est repérée grâce à un petit fil conducteur plongé dans un liquide conducteur auquel on soumet une différence de potentiel de 20V sur 21cm à l'aide d'un générateur continu. La tige conductrice prend le potentiel U du point où elle se trouve. Ce potentiel (ou différence de potentiel par rapport à la masse imposée par le générateur) est mesurable à l'oscilloscope. Une première étape est de vérifier que la relation $U = f(x)$ est linéaire en imposant $x = 0$ sur l'électrode de 10V . On décale la tige et on relève les couples (x, U) et on obtient le résultat suivant :

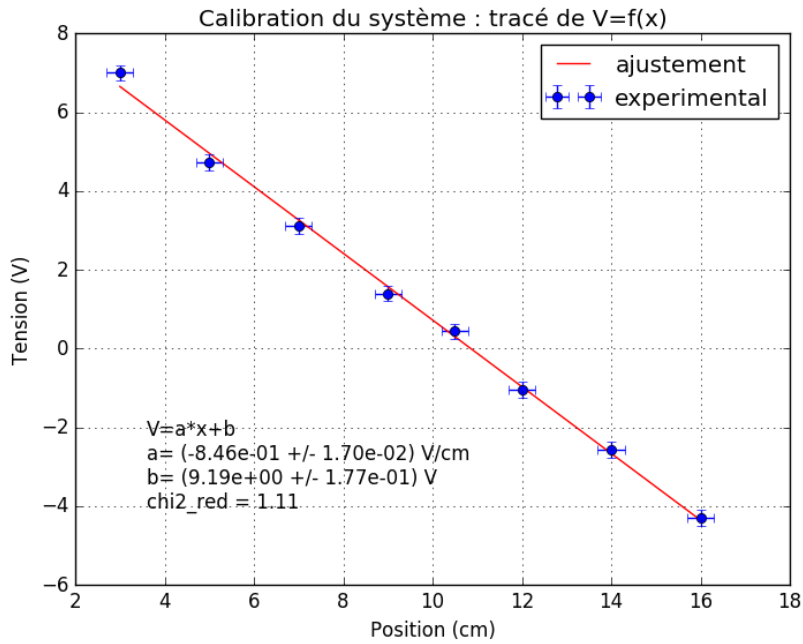


Figure 2: Calibration $U=f(x)$. La relation entre U et θ est donc linéaire pour les petits angles. La pente est proche de celle attendue : $20\text{V}/21\text{cm}$.

Ensuite il s'agit de déterminer la fréquence propre d'un pendule en l'absence de couplage. Pour cela nous faisons une acquisition sous latix pro en déclenchant du le lâcher du pendule = bloquer le pendule à un angle donné avec une potence, regarder la DDP à l'oscilloscope et demander le déclenchement sur la Channel associée au pendule en pente descendante (si on a la condition initiale du côté du 10V) à un potentiel légèrement en dessous de la valeur lue à l'oscilloscope et de lâcher après le lancement. On effectue une acquisition de $T_a = 10\text{s}$ avec une durée d'échantillonnage de $T_e = 10\text{ms}$ afin de respecter le critère de Shannon.

A l'aide d'un programme Python, nous faisons l'analyse de la FFT du signal. On obtient la fréquence propre de l'oscillateur : $f_0 = (0,7 \pm 0,01)\text{Hz}$. Un PFD nous permet d'obtenir la fréquence théorique du signal : $f_{0,th} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_t g L_g}{I}}$ où : $M_t = m + \rho \frac{\pi d^2 (L+l)}{4} = (629 \pm 3)\text{g}$ est la masse totale du système ; $L_g = \frac{mL + \rho \pi (\frac{d}{2})^2 \frac{L^2}{2} - \rho \pi (\frac{d}{2})^2 \frac{l^2}{2}}{m + \rho \pi (\frac{d}{2})^2 (L+l)} = (50 \pm 1)\text{cm}$ est la distance depuis l'axe de rotation du centre de gravité du système ; et enfin $I = I_m + I_t = mL^2 + \frac{1}{3} \rho \pi \frac{d^2}{4} (L^3 + l^3) = (77 \pm 2)\text{g} \cdot \text{m}^2$. On

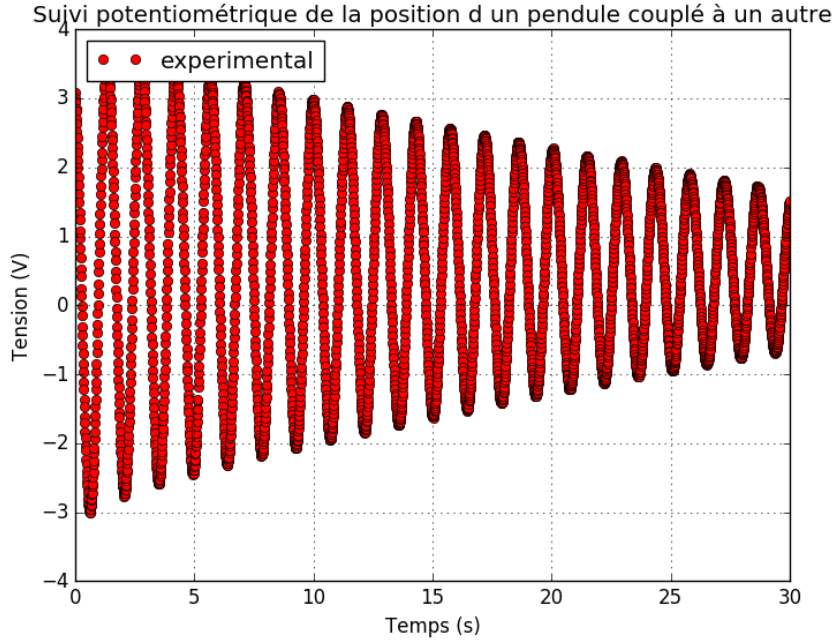


Figure 3: *Oscillation d'un pendule seul sans couplage. L'atténuation trahit la présence des frottements non contrôlables.*

obtient une fréquence propre supérieure. En réalité, si on fait le calcul en négligeant la masse qui fait "contre poids" vers le haut (qui est approximativement négligeable) on tombe sur le bon résultat théorique.

B. Étude du couplage

On étudie maintenant le couplage des deux pendules identiques. Les deux pendules sont couplés par un fil de torsion de constante "d'élasticité" C . Pour la connaître une première fois, il suffit de ré-itérer l'opération précédente avec le système couplé mais en maintenant fixe le second pendule. La fréquence d'oscillation du premier pendule est alors modifiée et devient : $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mg g L_g + C}{I}}$, soit traduit en terme de pulsation : $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{C}{I}$. Expérimentalement, on obtient : $f_1 = (0,85 \pm 0,05) Hz$. Le calcul de la constante de torsion nous donne alors $C = (0,75 \pm 0,03) N.m$

Ensuite on réalise tout un tas d'expériences où on lâche le pendule 1 avec une condition initiale à chaque fois la même mais en changeant les conditions initiales du second pendule. Si le second pendule est lâché en même temps que le premier et avec la même amplitude : on a des pendules oscillant en symétrie (système stable) avec une pulsation indépendante du couplage (car au final, s'ils sont identiques, comme ils commencent en même temps, le moment du couplage est nul tout le temps ce qui fait qu'il n'y a pas de transfert d'énergie). On a $\omega_{sym} = \omega_0$ soit $f_{sym} = (0,7 \pm 0,01) Hz$. En lâchant le seconde pendule en même temps mais à la position opposée, nous avons un système qui bat en antisymétrie, dépendante du couplage, à la pulsation : $\omega_{anti}^2 = \omega_0^2 + 2\frac{C}{I}$: le système est stable mais une petite perturbation va le déstabiliser et nous allons les retrouver en phase ultérieurement (ceci est accrochage de fréquence puisque le moment du couplage peut arriver, selon l'amplitude des oscillations, à passer dans son domaine de non linéarité). On obtient en faisant une série d'acquisition : $f_{anti} = (0,99 \pm 0,02) Hz$. Le calcul de la constante de torsion nous donne alors $C = (0,78 \pm 0,03) N.m$.

Enfin, en lâchant le second pendule à une position initiale nulle, la solution du système (TMC)

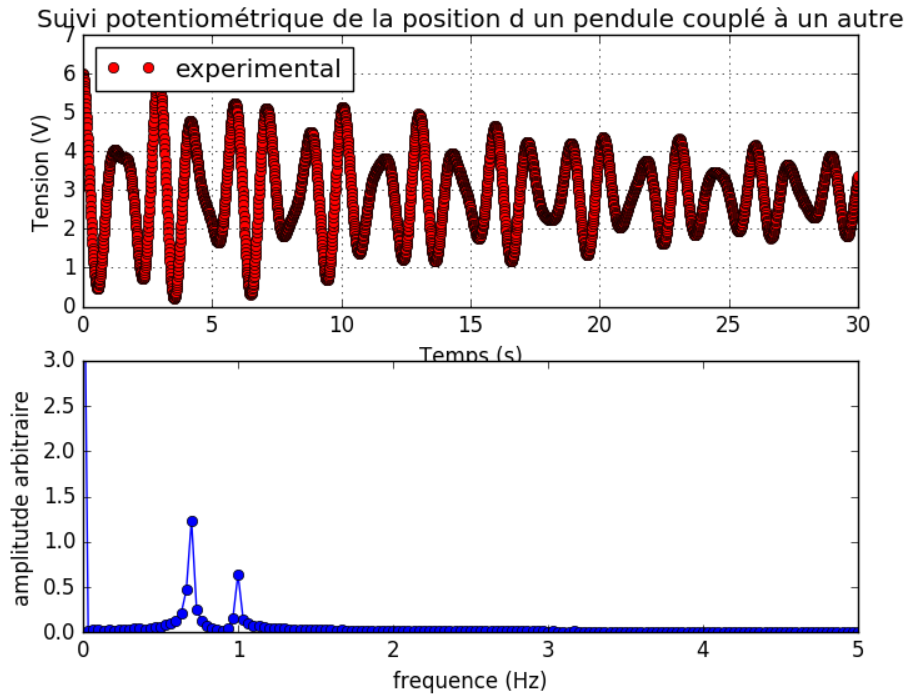


Figure 4: *Oscillation d'un pendule avec couplage : battements. Les fréquences de symétrie et d'antisymétrie se retrouvent ici.*

correspond à la somme de deux sinusoïdes de pulsations égales au mode symétrique et au mode antisymétrique. En fait nous avons des battements. L'acquisition réalisée est proposée sur la figure 4. Nous retrouvons avec la même précision que précédemment les fréquences précédentes. La fréquence nulle correspond à la contribution de deux fréquences : la nulle étant la valeur moyenne du signal, ainsi que la fréquence qui pourrait être associé au temps caractéristique d'atténuation qui est négligeable ici.

Remarque : Si on avait pu avoir la position au cours du temps du second pendule, nous aurions pu faire une étude énergétique. On pourrait aussi faire varier la masse du second pendule ce qui changerait sa pulsation propre donc les fréquences propres du système, mais nous ne pourrions avoir que des battements... On montrerait alors que le couplage est moins efficace.

II. Couplage électromagnétique par "inertie" : deux circuits RLC couplés par induction mutuelle

A. Détermination de la constante de couplage par analyse d'un seul circuit

Tout d'abord, on réalise le montage proposé sur la figure 5-a : on alimente un circuit L-C-R série avec un GBF délivrant une tension sinusoïdale. La résistance a une valeur d'environ $R = 100\Omega$ et la capacité est de : $C = 10nF$. En ce qui concerne les bobines, nous utilisons deux bobines Leybold de 1000 spires et d'inductance d'environ $L = 40mH$. Nous allons chercher à déterminer précisément ces valeurs d'inductance en recherchant la résonance en intensité aux bornes de la résistance par la méthode de Lissajous : Oscilloscope avec CH1 = générateur et CH2 = résistance + mode X-Y où nous obtenons à la résonance une droite à 45 degrés équivalent à un max de tensions et des signaux parfaitement en phase. On relève pour chacune des deux bobines que l'on étudiera une

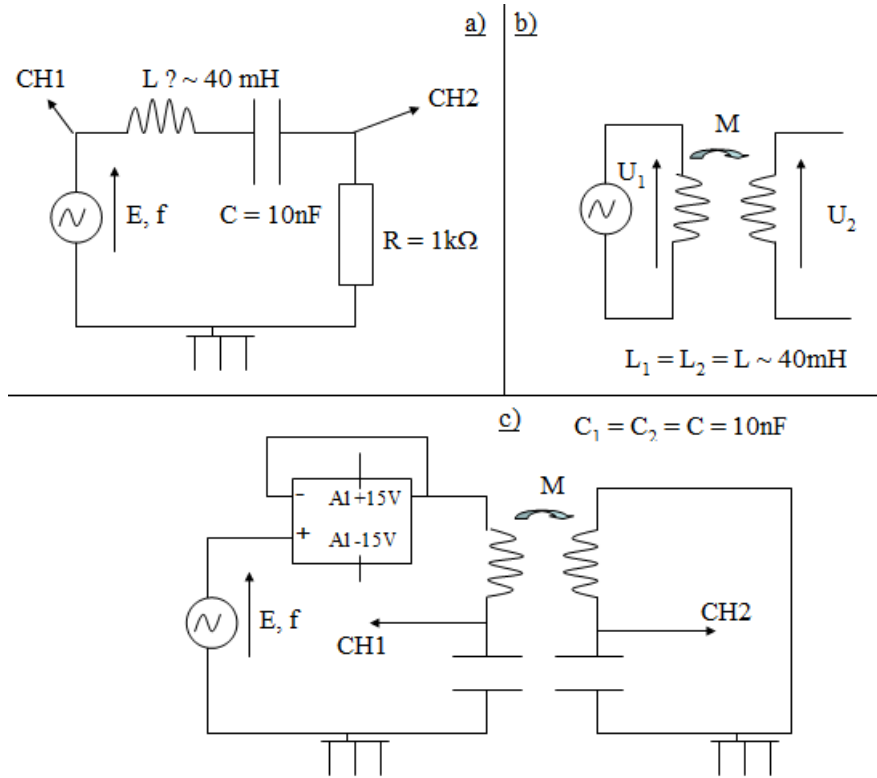


Figure 5: Schémas du système à étudier.

fréquence de résonance (au GBF) de $f_0 = (7,40 \pm 0,02)kHz$. Les inductances correspondantes sont : $L_1 = L_2 = L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = (46,2 \pm 0,1)mH$.

Par la suite, nous allons étudier le couplage par induction (coefficient d'inductance mutuelle M) des deux bobines lorsqu'elles seront placées l'une en face de l'autre. Si on met les deux bobines en série l'une en face de l'autre, nous obtenons une inductance équivalente, dépendant du sens de branchement des fils vis à vis du sens du courant, étant égale à $L_{\pm} = 2L \pm 2M$. La mesure comme précédemment nous donne des fréquences de résonance différentes (passage à $f_- = 5,67kHz$ et à $f_+ = 4,90kHz$). On peut alors calculer : $M = \frac{L_+ - L_-}{4} = (6,5 \pm 0,5)mH$. On définit, dans le cadre de ce couplage, la constante de couplage comme étant $k = \frac{M}{L} = (0,14 \pm 0,02)$.

Remarque : On peut réaliser un mini transformateur (montage b) et on peut remarquer que le rapport entre les tensions (si on se place à fréquence aux alentours de 7kHz pour négliger les résistances interne mais sans rajouter des parasites) nous donne la constante k qui est identique à celle trouvée.

B. Observation et quantification de la résonance entre deux circuits

Nous réalisons le montage c de la figure 5 : deux oscillateurs RLC (identiques au premier) dont les deux inductances sont en face l'une de l'autre = couplage. Nous avons donc deux oscillateurs identiques couplés avec la même constante que précédemment. Si on alimente le système avec un créneau, nous allons nous retrouver dans la même situation que dans le premier paragraphe : nous allons avoir des battements (plus propres d'ailleurs). On peut montrer que la période des battements, moyennant un couplage faible (constante de couplage très inférieure à 1) est donnée par : $T_b \approx \frac{T_0}{k}$ où $T_0 \approx (137 \pm 4)\mu s$ est la période des oscillations à l'intérieur des battements qui est très proche de la pulsation de résonance d'un seul pendule. Nous mesurons des battements d'environ

$T_b = (907 \pm 4)\mu s$, ce qui nous donne une constante de couplage de $k = 0,15$ ce qui est en accord avec ce qui a déjà été fait.

Lorsque nous excitons le système avec un signal sinusoïdal, nous observons un comportement de filtre qui est inhabituel : nous obtenons deux résonances qui sont à des fréquences différentes de la fréquence propre (à cette fréquence nous avons une antirésonance et les signaux sont en quadrature de phase...). Les fréquences de résonance sont données lorsque les deux signaux sont en phase : $f_{sym} = f_+ = 6,9kHz$ et lorsque les signaux sont en parfaite opposition de phase : $f_{anti} = f_- = 7,8kHz$. Toujours moyennant des approximations de couplage faible, nous obtenons : $k \approx \frac{f_- - f_+}{f_0}$, car ici nous avons : $f_{\pm} = \frac{f_0}{\sqrt{1 \pm k}}$. Soit une constante de couplage de $k = 0,12$.

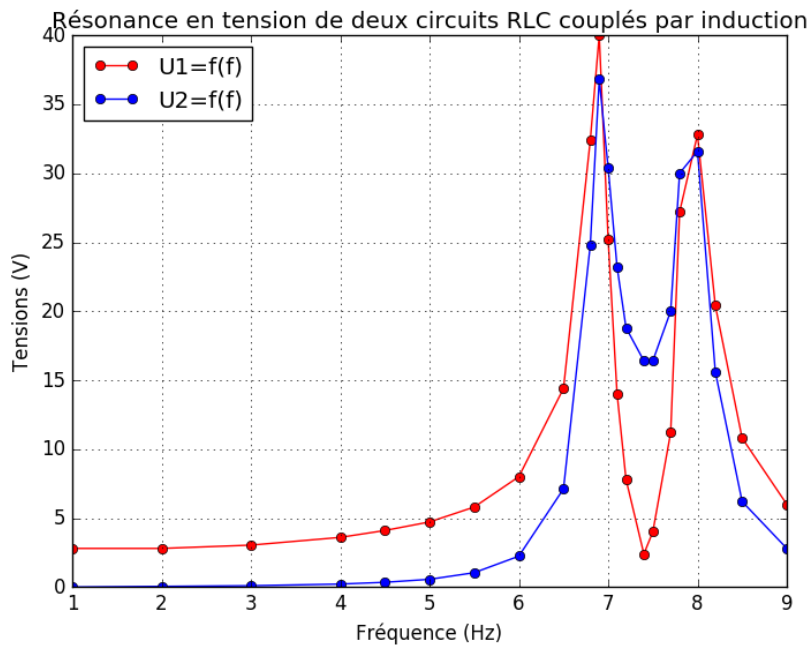


Figure 6: Courbe de résonance de deux circuits LC couplés (l'un excité, l'autre non).

Remarque : On pourra réaliser les expériences avec des bobines d'inductances différentes et on constatera que le couplage est effectivement moins efficace. On pourra aussi réaliser plusieurs circuits RLC identiques couplés entre eux pour montrer le fait qu'il existe 4 modes propres.

III. Couplage de N oscillateurs

A. "Étalonnage" du système

Nous cherchons maintenant à montrer que lorsqu'il y a N oscillateurs, nous pouvons nous ramener, dans le cadre de l'approximation d'un milieu continu, à la propagation d'une onde. Le système a aussi N modes propres mais il est difficile de les montrer (ou avec la corde de Melde, mais du coup il y en a une infinité).

Pour cela, on utilise un ondoscope (ou échelle de perroquet). Cet ondoscope est constitué de tiges de longueur $L = 20cm$ et de masse $M = 4,5g$ sur lesquelles sont accrochées en bouts de course des masses identiques $m = 7,3g$. Les tiges sont maintenues en leur centre de gravité sur un axe où elles sont libre de faire des rotations. Les tiges sont reliées entre elles à une distance $a = 2cm$ de l'axe

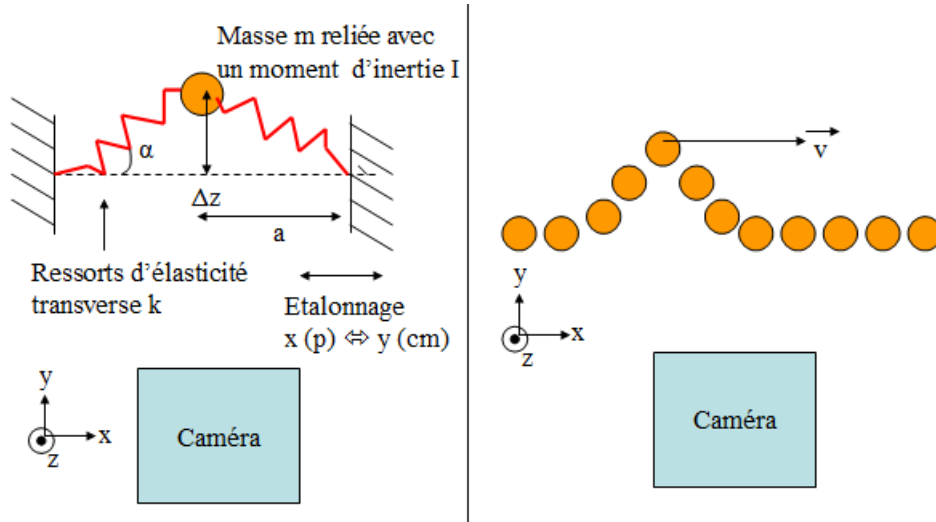


Figure 7: Schéma du système à étudier : à gauche : l'étude d'une seule masse ; à droite : la propagation d'une onde.

par des ressorts identiques (il y en a 4) d'élasticité transverse k et de longueur à vide (axe horizontal suivant x) a .

Si on décide d'étudier un ressort tout seul (fréquence propre d'un oscillateur) il suffit de se focaliser sur une masse et de fixer à l'aide de pinces et de potences les deux masses voisines. En considérant que la force de rappel des ressorts, dans le domaine de linéarité, peut s'écrire : $\vec{F} = -kZ$ (les autres masses étant à l'horizontale). Comme il est facile de relier l'angle de déplacement α à ΔZ , nous pouvons utiliser le Théorème du Moment Cinétique sur l'axe de rotation afin de relier l'ensemble des grandeurs du problème (le poids n'intervient pas car tout se compense). On arrive alors à l'équation régissant la grandeur ϕ (α ou Z) : $\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$; avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{4a^2k}{I}}$.

Nous pouvons alors chercher à déterminer la valeur de k . Pour cela, on filme avec une caméra les vibrations d'une seule masse. Comme il est difficile de choisir les bons paramètres, on fait un traitement d'image où l'on repère les instants t_n (où n est un "numéro de fois") où l'oscillation est au maximum de son amplitude. On trace $t_n = f(n)$ et nous obtenons une droite de pente $T_0 = (353 \pm 2)\mu s$. Ainsi avec $I = 2L^2(m + \frac{M}{3}) = (1,76 \pm 0,08)10^{-4}kg.m^2$, nous obtenons $k = (35 \pm 4)kg/s^2$.

B. Propagation d'une onde

Enfin on regarde la propagation d'un paquet d'onde dans l'ondoscope. Pour cela on filme une rotation-impulsive brutale donnée au système. On filme toujours avec le même système (ce coup-ci, sans oublier de faire un étalonnage pixel-longueur avec une règle étalon dans la bonne profondeur) et on repère à l'aide d'un logiciel de traitement d'images la position (origine au bord de l'ondoscope) au cours du temps du maximum du pic dû à l'impulsion. En traçant $x = f(t)$ nous obtenons une droite nous donnant la célérité de l'onde (en fait c'est la vitesse de groupe qu'on associe à la célérité si on néglige tout ce qui est frottement).

Effectivement, en mettant en équation le problème et en passant à la limite continue (TMC + forces différentes en x et $x + dx =$ dérivée seconde par rapport à la position), nous pouvons montrer que α et donc Z suivent l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0$ où nous identifions : $c =$

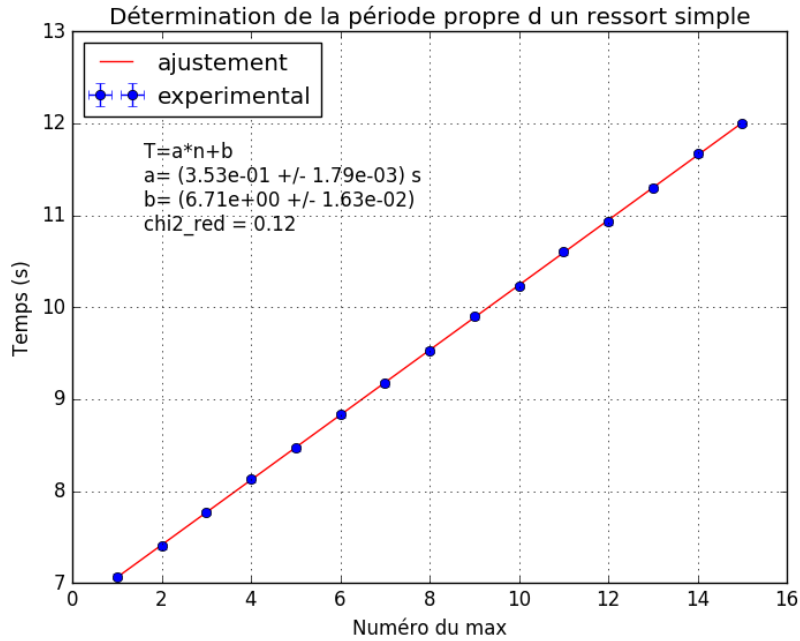


Figure 8: Ajustement pour trouver la raideur du ressort.

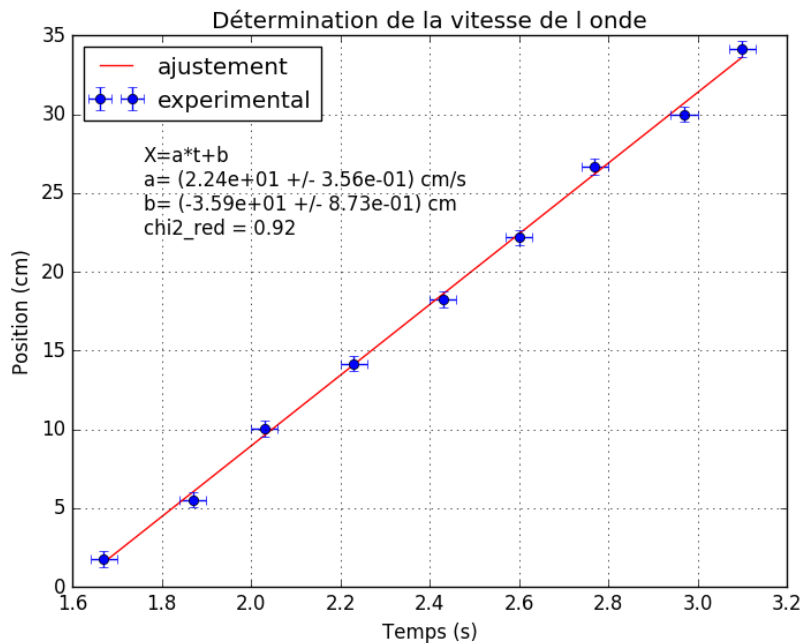


Figure 9: Ajustement pour trouver la vitesse de l'onde.

$\sqrt{\frac{2ka^4}{I}}$. Expérimentalement, on trouve : $c = (22,4 \pm 0,4) \text{ cm/s}$. Ainsi, nous pouvons obtenir $k = (28 \pm 1) \text{ kg/s}^2$. Les domaines d'incertitudes ne se recouvrent pas et nous avons un facteur 1,25 entre les deux valeurs. Cependant, les résultats sont proches ce qui nous permet d'admettre que la méthode et le modèle sont corrects en tenant compte du fait que la dernière méthode (propagation de l'onde) peut s'avérer être imprécise.